

Formelsammlung | extra

Mathematik

5.–10. Klasse

- Formeln und Begriffe
 - Definitionen und Sätze
 - Zahlentafeln und Wissenswertes
-
-
-



Jeder lernt das Gleiche anders ...

Passendes Übungsmaterial bei Lernhelfer

Mit deiner gekauften Schulgrammatik erhältst du fächerbezogene Lernkartensets und Trainingsklausuren mit Lösungen.

Alles exklusiv im Paket für nur 1,- Euro.

Melde Dich einfach an unter:

www.lernhelfer.de/schulgrammatik

Dein Lernpaket
für nur 1,- Euro!

Duden

Formelsammlung | extra

Mathematik

5. bis 10. Klasse

Formeln und Begriffe
Definitionen und Sätze
Zahlentafeln und Wissenswertes

4., aktualisierte Auflage

Dudenverlag
Berlin

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Das Wort **Duden** ist für den Verlag Bibliographisches Institut GmbH als Marke geschützt.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

© 2015 D C B A

Bibliographisches Institut GmbH

Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung Constanze Schöder

Redaktion Dr. Wiebke Salzmänn, Dr. Lutz Engelmann

Autoren Dr. Uwe Bahro, Dr. Lutz Engelmann, Dr. Sonja Huster, Dr. Astrid Kahlenberg, Rolf Langenhan, Dr. Günter Liesenberg, Prof. Dr. habil. Lothar Meyer, Dr. Gerd-Dietrich Schmidt

Herstellung Ursula Fürst

Layout Peter Lohse

Umschlaggestaltung Büroecco, Augsburg

Satz Kösel, Altusried-Krugzell

Druck und Bindung MOHN Media Mohndruck GmbH
Carl-Bertelsmann-Straße 161 M, 33311 Gütersloh

ISBN 978-3-411-72084-2

Auch als E-Book erhältlich unter: ISBN 978-3-411-91108-0
www.duden.de

Inhalt

Näherungswerte; Einheiten; Mengenlehre			
Kapitelübersicht	5	3 Rechnen mit positiven und negativen Zahlen	23
1 Römische Zahlzeichen	6	4 Termumformungen	24
2 Näherungswerte und Zehnerpotenzen	7	5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	26
2.1 Rundungsregeln	7	5.1 Potenzen	26
2.2 Rechnen mit Näherungswerten	7	5.2 Wurzeln	26
2.3 Darstellung von Dezimalzahlen mithilfe abgetrennter Zehnerpotenzen	8	5.3 Logarithmen	27
3 Rechnen mit dem Taschenrechner	9	6 Proportionen und Dreisatz	28
4 Einheiten	12	6.1 Proportionen	28
4.1 Vorsätze bei Einheiten	12	6.2 Mittelwerte	28
4.2 Einheiten von Größen	13	6.3 Dreisatz	29
4.3 Nichtdezimale Maße (Auswahl)	14	6.4 Kettensatz	30
5 Mengenlehre	16	6.5 Mischungsrechnen	30
5.1 Mengenbeziehungen und Mengenverknüpfungen	16	7 Prozent- und Zinsrechnung	31
5.2 Zahlenmengen	17	7.1 Prozentrechnung	31
5.3 Intervalle (spezielle Teilmengen von \mathbb{R})	18	7.2 Zinsrechnung	32
Praktisches Rechnen		Gleichungslehre	
Kapitelübersicht	19	Kapitelübersicht	33
1 Teiler und Vielfache	20	1 Äquivalenzumformungen von Gleichungen und Ungleichungen	34
1.1 Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen	20	2 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	36
1.2 Teilbarkeitsregeln und Teilbarkeitseigenschaften	21	2.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen	36
2 Bruchrechnung	22	2.2 Lineare Gleichungssysteme aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen	36
		2.3 Lineare Gleichungssysteme aus drei Gleichungen mit drei Variablen	37
		3 Quadratische Gleichungen	38
		4 Gleichungen höheren Grades	39

Geometrie

Kapitelübersicht

	Kapitelübersicht	41
1	Planimetrie	42
1.1	Strahlensätze; Ähnlichkeit; Kongruenz	43
1.2	Winkel	45
1.3	Dreiecke und Vierecke	47
1.4	Regelmäßige Vielecke	50
1.5	Kreis	50
2	Stereometrie	52
2.1	Körper mit ebenen Begrenzungs- flächen	52
2.2	Körper mit gekrümmten Begren- zungsflächen	55
2.3	Zusammengesetzte Körper	56
3	Darstellende Geometrie	57
3.1	Körpernetze	57
3.2	Parallelprojektionen	58
4	Vektoren	61
4.1	Punkte im Koordinatensystem	61
4.2	Vektoren	62
4.3	Rechnen mit Vektoren	63
4.4	Geraden	64

Funktionen

Kapitelübersicht

	Kapitelübersicht	65
1	Zuordnung und Funktionsbegriff	66
2	Funktionsdarstellung	67
3	Arten von Funktionen	69
3.1	Lineare Funktionen	69
3.2	Quadratische Funktionen	70
3.3	Umgekehrt proportionale Funktionen	72
3.4	Potenzfunktionen	72
3.5	Wurzelfunktionen	73
3.6	Winkelfunktionen	74
3.7	Exponentialfunktionen	79
3.8	Logarithmusfunktionen	79
3.9	Wachstums- und Abklingvorgänge	80
3.10	Ganzrationale Funktionen	81
3.11	Eigenschaften von Funktionen	82
3.12	Ableitungen	83
3.13	Extrempunkte	85

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Kapitelübersicht

	Kapitelübersicht	87
1	Kombinatorik	88
1.1	Fakultät; Binomialkoeffizienten	88
1.2	Permutationen; Variationen; Kombinationen	90
2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	92
2.1	Begriffe	93
2.2	Wahrscheinlichkeit und ihre Eigenschaften	94
2.3	Pfadregeln; unabhängige Ereignisse	96
3	Beschreibende Statistik	97
3.1	Lage- und Streumaße in der Statistik	97
3.2	Darstellungsarten in der Statistik	98

Mathematische Tafeln/ Übersichten

Kapitelübersicht

	Kapitelübersicht	101
1	Quadratzahlen; Kubikzahlen; Quadratwurzeln; Kubikwurzeln	102
2	Umrechnung Gradmaß – Bogenmaß	103
3	Primzahlen; Primfaktor- zerlegung der Zahlen bis 1000	104
4	Kreisflächeninhalt	106
5	Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$	108
6	Zufallszahlen	110

Wissenswertes

Kapitelübersicht

	Kapitelübersicht	111
1	Naturkonstanten	112
2	Größen und Einheiten im Überblick	113
3	Umrechnungen zwischen Einheiten	116
4	Technisches Zeichnen	117
5	Datendarstellung	119
	Register	123

PRAKTISCHES RECHNEN

1 Teiler und Vielfache	20	5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	26
1.1 Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen	20	5.1 Potenzen	26
■ BESONDERS NÜTZLICH Der euklidische Algorithmus	21	5.2 Wurzeln	26
1.2 Teilbarkeitsregeln und Teilbarkeitseigenschaften	21	5.3 Logarithmen	27
■ BESONDERS NÜTZLICH Teilbarkeitsbeziehungen	21	■ BESONDERS NÜTZLICH Spezielle Basen	27
2 Bruchrechnung	22	6 Proportionen und Dreisatz	28
3 Rechnen mit positiven und negativen Zahlen	23	6.1 Proportionen	28
4 Termumformungen	24	6.2 Mittelwerte	28
■ BESONDERS NÜTZLICH Hilfen beim Kopfrechnen durch binomische Formeln	24	6.3 Dreisatz	29
■ BESONDERS NÜTZLICH Rechnen mit Klammern	25	6.4 Kettensatz	30
		6.5 Mischungsrechnen	30
		7 Prozent- und Zinsrechnung	31
		7.1 Prozentrechnung	31
		■ BESONDERS NÜTZLICH „Bequeme“ Prozentsätze	31
		7.2 Zinsrechnung	32
		■ BESONDERS NÜTZLICH „Bequeme“ Zinsdivisoren (Zinsteiler)	32

1 Teiler und Vielfache

BLICKPUNKT

Das dekadische Positionssystem

Unser dekadisches Positionssystem geht auf den indischen Kulturkreis zurück. 773 brachte ein Inder astronomische Schriften von Bramagupta an den Hof des Kalifen Al Mansur in Bagdad. Der große arabische Mathematiker Al-Chwarizmi (787–ca. 850) verwertete diese 820 in seinem Lehrbuch der Arithmetik, in dem er die neuen indischen Ziffern erklärte und verwendete.

Im 12. Jahrhundert wurde dieses Buch in Spanien durch Robert von Chester übersetzt. Von dort aus traten dann die so genannten arabischen Ziffern ihren Siegeszug an. Man konnte mit den neuen Ziffern viel leichter rechnen, weil zum ersten Mal die Null verwendet wurde. Die Form der Ziffern hat sich seit ihrer Schaffung durch die Inder mehrfach verändert. Die heutige Gestalt unserer Ziffern geht auf Albrecht Dürer (1471–1528) zurück.

Rechenoperationen

Stufe / Operation	Verknüpfung	a	b	c
1 / Addition	$a + b = c$	Summand	Summand	Summe
1 / Subtraktion	$a - b = c$	Minuend	Subtrahend	Differenz
2 / Multiplikation	$a \cdot b = c$	Faktor	Faktor	Produkt
2 / Division	$a : b = c; \quad b \neq 0$	Dividend	Divisor	Quotient
3 / Quadrieren	$a^2 = c$	Basis	Exponent 2	Quadrat
3 / Potenzieren	$a^b = c$	Basis	Exponent	Potenz
3 / Radizieren (Wurzelziehen)	$\sqrt[b]{a} = c; \quad a \geq 0; b \neq 1$	Radikand	Wurzelexponent	Wurzel
3 / Logarithmieren	$\log_a b = c; \quad a > 0; a \neq 1$	Basis	Numerus	Logarithmus

1.1 Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen

Teiler	Vielfache
a heißt Teiler von b , wenn es ein n ($n \in \mathbb{N}$) gibt, sodass $a \cdot n = b$ gilt. (Schreibweise: $a \mid b$)	b heißt Vielfaches von a , wenn a ein Teiler von b ist.
$\text{ggT}(a, b)$ heißt gemeinsamer Teiler von a und b , wenn $\text{ggT}(a, b)$ sowohl a als auch b teilt.	$\text{gV}(a, b)$ heißt gemeinsames Vielfaches von a und b , wenn sowohl a als auch b Teiler von $\text{gV}(a, b)$ ist.
Mit ggT (a, b) bezeichnet man den größten gemeinsamen Teiler von a und b .	Mit kgV (a, b) bezeichnet man das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b .
Bestimmung des $\text{ggT}(a, b)$ mittels Primfaktorzerlegung : Man multipliziert die kleinsten Potenzen aller Primfaktoren, die sowohl in der Zerlegung von a als auch in der Zerlegung von b vorkommen.	Bestimmung des $\text{kgV}(a, b)$ mittels Primfaktorzerlegung : Man multipliziert die höchsten Potenzen aller Primfaktoren, die in der Zerlegung von a oder in der Zerlegung von b vorkommen.

BESONDERS NÜTZLICH**Der euklidische Algorithmus**

Bestimmung des $\text{ggT}(135, 105)$ mithilfe des **euklidischen Algorithmus**:

$$135 : 105 = 1, \text{ Rest } 30$$

$$105 : 30 = 3, \text{ Rest } 15$$

$$30 : 15 = 2, \text{ Rest } 0 \quad \text{ggT}(135, 105) = 15$$

Bestimmung des $\text{kgV}(a, b)$ mithilfe des euklidischen Algorithmus und der folgenden Beziehung:

$$\text{kgV}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{ggT}(a, b)}$$

Sind zwei Zahlen a und b **teilerfremd**, so gilt $\text{ggT}(a, b) = 1$ und $\text{kgV}(a, b) = a \cdot b$.

1.2 Teilbarkeitsregeln und Teilbarkeitseigenschaften

Teiler	Regel ($n \in \mathbb{N}^*$)
n	Null ist durch jede Zahl teilbar, jedoch nicht durch sich selbst.
n	Jede Zahl n ist durch sich selbst teilbar.
1	Jede Zahl n (auch 0) ist durch 1 teilbar.
2	Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar, d.h. 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.
3	Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist.
4	Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden.
5	Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer durch 5 teilbar, d.h. 0 oder 5 ist.
6	Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
8	Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden.
9	Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme (Summe ihrer Ziffern) durch 9 teilbar ist.
10	Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist.
25	Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern 00, 25, 50 oder 75 sind.

BESONDERS NÜTZLICH**Teilbarkeitsbeziehungen**

$$\text{Aus } a \mid b \text{ folgt } a \mid (b \cdot c).$$

$$\text{Aus } a \mid b \text{ und } c \mid d \text{ folgt } (a \cdot c) \mid (b \cdot d).$$

$$\text{Aus } a \mid b \text{ und } a \mid c \text{ folgt } a \mid (b + c).$$

$$\text{Aus } a \mid b \text{ und } a \mid c \text{ folgt } a \mid (b - c).$$

$$\text{Aus } a \mid b \text{ folgt } (a \cdot c) \mid (b \cdot c).$$

$$\text{Aus } a \mid b \text{ und } b \mid c \text{ folgt } a \mid c.$$

$$\text{Aus } a \mid c \text{ und } b \mid c \text{ und } \text{ggT}(a, b) = 1 \text{ folgt } (a \cdot b) \mid c.$$

2 Bruchrechnung

Grundbegriffe und Bruchoperationen

Für alle Formeln in diesem Abschnitt gilt: $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; Nenner $\neq 0$

Bruch

$\frac{a}{b}$ heißt Bruch, a heißt **Zähler** und b **Nenner** des Bruches.

Kehrwert

Der Bruch $\frac{b}{a}$ heißt **Kehrwert (reziproker Wert)** von $\frac{a}{b}$.

Es gilt: $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$

Erweitern

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (c \neq 0)$$

Zähler und Nenner sind mit der gleichen Zahl zu multiplizieren.

Kürzen

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad (c \neq 0 \text{ und } c \mid a \text{ und } c \mid b)$$

Zähler und Nenner sind durch die gleiche Zahl zu dividieren.

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Zwei Brüche heißen gleichnamig, wenn sie denselben Nenner haben.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Zähler werden addiert (subtrahiert) und der Nenner wird beibehalten.

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

oder: (1) $\text{gV}(b, d)$ bzw. $\text{kgV}(b, d)$ bestimmen (**Hauptnenner**)

(2) beide Brüche auf den Hauptnenner erweitern

(3) wie bei gleichnamigen Brüchen verfahren

Multiplikation von Brüchen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}$$

Es werden Zähler mit Zähler sowie Nenner mit Nenner multipliziert.

Division von Brüchen

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Es wird der Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.

3 Rechnen mit positiven und negativen Zahlen

Grundbegriffe und Vorzeichenregeln

Betrag einer Zahl

Der **Betrag** $|a|$ einer Zahl a entspricht dem Abstand dieser Zahl von 0 auf der Zahlengeraden.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = |-a|; |a| \geq 0$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$

Entgegengesetzte Zahlen

Zwei Zahlen, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden (also den gleichen Betrag haben), heißen **zueinander entgegengesetzt**. Die Zahl 0 ist zu sich selbst entgegengesetzt.

Die entgegengesetzte Zahl (**Gegenzahl, Kehrzahl**) von a ist $-a$.

Bei der formelmäßigen Darstellung der Rechenregeln stehen die Variablen a und b für die Beträge reeller Zahlen.

Addition

Zwei Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** werden addiert, indem man ihre Beträge addiert. Die Summe erhält das gemeinsame Vorzeichen.

$$(+a) + (+b) = +(a + b)$$

$$(+2) + (+5) = +(2 + 5) = +7$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

$$(-3) + (-4) = -(3 + 4) = -7$$

Zwei Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** werden addiert, indem man die Differenz der Beträge berechnet. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.

$$(+a) + (-b) = -(b - a)$$

$$(b > a)$$

$$(+2) + (-5) = -(5 - 2) = -3$$

$$(-a) + (+b) = +(b - a)$$

$$(b > a)$$

$$(-3) + (+4) = +(4 - 3) = +1$$

Subtraktion

Eine Zahl b wird von einer Zahl a subtrahiert, indem man zu a die **entgegengesetzte** Zahl von b addiert.

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = -(b - a)$$

$$(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -(3 - 2) = -1$$

$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b) = +(b - a)$$

$$(-3) - (-4) = (-3) + (+4) = +(4 - 3) = +1$$

$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = +(a + b)$$

$$(+2) - (-3) = (+2) + (+3) = +(2 + 3) = +5$$

$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b) = -(a + b)$$

$$(-3) - (+4) = (-3) + (-4) = -(3 + 4) = -7$$

Multiplikation

Zwei Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert. Das Produkt erhält das positive Vorzeichen.

$$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$$

$$(+2) \cdot (+3) = +(2 \cdot 3) = +6$$

$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$$

$$(-2) \cdot (-3) = +(2 \cdot 3) = +6$$

Zwei Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert. Das Produkt erhält das negative Vorzeichen.

$$(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

$$(+2) \cdot (-3) = -(2 \cdot 3) = -6$$

$$(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$$

$$(-2) \cdot (+3) = -(2 \cdot 3) = -6$$

Grundbegriffe und Vorzeichenregeln (Fortsetzung)

Division

(Nenner $\neq 0$)

Durch eine Zahl wird dividiert, indem man mit dem **Kehrwert** dieser Zahl multipliziert.

Es gelten dann wieder die Vorzeichenregeln der Multiplikation.

$$(+a) : (+b) = (+a) \cdot \left(+\frac{1}{b}\right) = +\frac{a}{b}$$

$$(+9) : (+3) = (+9) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{9}{3} = +3$$

$$(-a) : (-b) = (-a) \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) = +\frac{a}{b}$$

$$(-9) : (-3) = (-9) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{9}{3} = +3$$

$$(+a) : (-b) = (+a) \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) = -\frac{a}{b}$$

$$(+8) : (-4) = (+8) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{8}{4} = -2$$

$$(-a) : (+b) = (-a) \cdot \left(+\frac{1}{b}\right) = -\frac{a}{b}$$

$$(-8) : (+4) = (-8) \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{8}{4} = -2$$

4 Termumformungen

Für alle Formeln in diesem Abschnitt gilt: a, b, c, d sind in \mathbb{R} erklärte Terme.

Rechengesetze

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Kommutativgesetz

- Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) der Addition
- Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) der Multiplikation

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Assoziativgesetz

- Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz) der Addition
- Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz) der Multiplikation

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Distributivgesetz

- Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(1. binomische Formel)

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(2. binomische Formel)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

(3. binomische Formel)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

BESONDERS NÜTZLICH

Hilfen beim Kopfrechnen durch binomische Formeln

- Viele Aufgaben lassen sich als binomische Formeln darstellen:

$$104^2 = (100 + 4)^2 = 100^2 + 2 \cdot 4 \cdot 100 + 4^2 = 10000 + 800 + 16 = 10816$$

$$87 \cdot 93 = (90 - 3) \cdot (90 + 3) = 90^2 - 3^2 = 8100 - 9 = 8091$$

Vorrangregeln

- Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet.

$$(3 + 2) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$$

- Potenz- und Wurzelberechnung geht vor „Punktrechnung“ und diese vor „Strichrechnung“.

$$3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$$

$$4 \cdot \sqrt{2+7} = 4 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$3 \cdot (a + b)^2 = 3 \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = 3a^2 + 6ab + 3b^2$$

BESONDERS NÜTZLICH

Rechnen mit Klammern

- **Plusklammerregel** $+(a + b - c) = a + b - c$

Das Pluszeichen vor der Klammer und die Klammer können weggelassen werden. An den Vorzeichen in der Klammer ändert sich nichts.

$$+(3 + 4 - 2) = 3 + 4 - 2 = 5$$

- **Minuskammerregel** $-(a + b - c) = +(-a - b + c) = -a - b + c$

Um das Minuszeichen vor der Klammer und die Klammer weglassen zu können, müssen alle Vorzeichen innerhalb der Klammer umgekehrt werden.

$$-(3 + 4 - 2) = +(-3 - 4 + 2) = -3 - 4 + 2 = -5$$

- **Ausmultiplizieren** $a(b + c - d) = ab + ac - ad$

Zum Multiplizieren einer Summe mit einer Zahl a wird jeder einzelne Summand mit der Zahl a multipliziert. Dabei kommen die Vorzeichenregeln zur Anwendung.

$$3(5 + 4 - 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 15 + 12 - 6 = 21$$

- **Ausklammern** $ab + ac - ad = a(b + c - d)$

Beim Ausklammern einer Zahl a wird jeder Summand durch die Zahl a dividiert. Dabei kommen die Vorzeichenregeln zur Anwendung.

- **Multiplikation von Summen** $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Bei der Multiplikation zweier Summen wird jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert und der Ausdruck als Summe aufgeschrieben.

$$(a + 1) \cdot (a + 3) = a^2 + 3a + a + 3 = a^2 + 4a + 3$$

5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

5.1 Potenzen

Definition

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N}.$$

Man nennt a^n **Potenz**, a **Basis**, n **Exponent**.

$$a^2 = a \cdot a \quad \text{heißt **Quadrat** .}$$

$$\text{Es gilt: } a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}, a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$$

Potenzgesetze

Die Gesetze gelten für alle $m, n \in \mathbb{R}$ bei positiven reellen Basen. Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten sie bei Basen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

gleiche Basis

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

gleicher Exponent

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Potenzieren

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

5.2 Wurzeln

Definition

$a = c^n$ ist gleichbedeutend mit $c = \sqrt[n]{a}$ (gelesen: **n -te Wurzel aus a**).

$$a \in \mathbb{R}, a \geq 0, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, c \geq 0$$

Man nennt c **n -te Wurzel**, a **Radikand**, n **Wurzelexponent**.

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} \quad \text{heißt **Quadratwurzel** .} \quad \sqrt[3]{a} \quad \text{heißt **Kubikwurzel** .}$$

Wurzelgesetze

Die Gesetze gelten für alle $a, b \in \mathbb{R}; a, b \geq 0; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (\text{für } b > 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

5.3 Logarithmen

Definition

$b = a^c$ ist gleichbedeutend mit $c = \log_a b$ (gelesen: **Logarithmus b zur Basis a**).

$a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, a > 0, b \in \mathbb{R}, b > 0$

„Durch Logarithmieren bestimmt man die Größe des Exponenten.“

Man nennt c **Logarithmus**, a **Basis**, b **Numerus**.

Es gilt: $a^{\log_a b} = b, \log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.

Logarithmengesetze

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a u^r = r \log_a u \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$$

Basiswechsel

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} = \frac{\ln b}{\ln c} = \frac{\lg b}{\lg c}$$

BESONDERS NÜTZLICH

Spezielle Basen

Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus):

$$\log_{10} x = \lg x$$

Es gilt: $\lg 10^n = n$

Natürlicher Logarithmus:

$$\log_e x = \ln x$$

Es gilt: $\ln e^x = x$

$e = 2,71828\dots$ (eulersche Zahl)

6 Proportionen und Dreisatz

6.1 Proportionen

	Direkte Proportionalität	Indirekte (umgekehrte) Proportionalität
Sachverhalt	$\begin{array}{c cc} \text{Größe X} & a & c \\ \hline \text{Größe Y} & b & d \end{array}$	$\begin{array}{c cc} \text{Größe X} & a & c \\ \hline \text{Größe Y} & b & d \end{array}$
Verhältnsgleichung	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ Daraus folgt: $a \cdot d = b \cdot c$	$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ Daraus folgt: $a \cdot b = c \cdot d$
Proportionalitätsfaktor k	$b = k \cdot a$ $d = k \cdot c$ Daraus folgt: $k = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (quotientengleich)	$b = k \cdot \frac{1}{a}$ $d = k \cdot \frac{1}{c}$ Daraus folgt: $k = a \cdot b = c \cdot d$ (produktgleich)

6.2 Mittelwerte

	Proportion und Formel	Allgemeine Formel
Arithmetisches Mittel	$\frac{a-x}{x-b} = \frac{1}{1}$ Daraus folgt: $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$	$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$
Geometrisches Mittel g (mittlere Proportionale)	$\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$ Daraus folgt: $g = \sqrt{ab}$ $a, b > 0$	$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ $a_i \geq 0$
Harmonisches Mittel h	$\frac{a-h}{h-b} = \frac{a}{b}$ Daraus folgt: $h = \frac{2ab}{a+b}$	$h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

Zusammenhänge zwischen Mittelwerten

- $(a_i)_{\text{Max}} \geq \bar{x} \geq g \geq h \geq (a_i)_{\text{Min}}$ für $a_i \geq 0$ (nach Cauchy)
- $g = \sqrt{h \cdot \bar{x}}$ für zwei Werte a, b

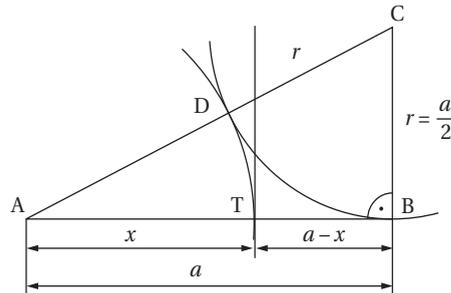
Goldener Schnitt

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

$$\text{Daraus folgt: } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$$

$$x \approx 0,618 \cdot a$$

$$a \approx 1,618 \cdot x$$



Konstruktionsbeschreibung:

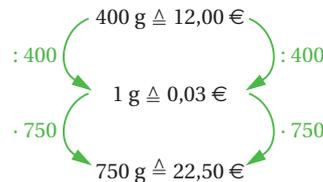
1. In B wird die Senkrechte errichtet und auf dieser Senkrechten von B aus die Strecke $r = \frac{a}{2}$ abgetragen. Man erhält den Punkt C.
2. A wird mit C verbunden.
3. Um C wird ein Kreis mit dem Radius $r = \frac{a}{2}$ gezeichnet. Der Schnittpunkt mit der Strecke AC ist D.
4. Um A wird ein Kreis mit dem Radius AD gezeichnet. Der Schnittpunkt mit der Strecke AB ist T, der gesuchte Teilungspunkt.

6.3 Dreisatz

Verfahren bei direkter Proportionalität

- Schluss vom Wert der bekannten Mehrheit
- auf den Wert für eine (Mengen-)Einheit und
- von dieser Einheit auf die gesuchte Mehrheit

Wie viel bezahlt man für 750 g Tee, wenn 400 g 12,00 € kosten?



Verfahren bei indirekter Proportionalität

- Schluss vom Wert der bekannten Mehrheit
- auf den Wert für eine (Mengen-)Einheit und
- von dieser Einheit auf die gesuchte Mehrheit

Fünf Kühe kommen mit einer bestimmten Futtermenge 16 Tage aus. Wie viel Tage reicht das Futter für 8 Kühe?



6.4 Kettensatz

Verfahren

Der **Kettensatz** ist ein Verfahren, bei dem über logische Schlüsse aus mehreren bekannten Größen auf eine unbekannte Größe geschlossen wird. Es handelt sich dabei um eine Aufeinanderfolge von Dreisätzen bei direkter Proportionalität.

Dieses Verfahren wird z. B. bei Preisberechnungen mit ausländischen Währungen und Maßen angewendet.

- Entwickeln der Kette:
 - Die Kette beginnt mit der Frage nach der gesuchten Größe.
 - Der linke Term jeder folgenden Gleichung hat die gleiche Einheit wie der rechte Term der vorhergehenden Gleichung.
 - Die Kette ist geschlossen, wenn erste und letzte Einheit übereinstimmen.
- Ausrechnen der Kette:
 - Produkt der Zahlen der rechten Terme in den Zähler eines Bruches, Produkt der Zahlen der linken Terme in dessen Nenner schreiben und Bruch berechnen.

Wie viel Euro kosten 50 m Stoff aus den USA, wenn dieser dort zu 8,90 \$ das Yard gehandelt wird?

(11 m \approx 12 yds,

Kurs: 1 € \triangleq 1,0253 \$)

$$x \text{ €} \triangleq 50 \text{ m}$$

$$11 \text{ m} \triangleq 12 \text{ yds}$$

$$1 \text{ yd} \triangleq 8,90 \$$$

$$1,0235 \$ \triangleq 1 \text{ €}$$

$$x = \frac{50 \cdot 12 \cdot 8,90}{11 \cdot 1,0253} \text{ €} = 473,48 \text{ €}$$

6.5 Mischungsrechnen

Mischungskreuz-Regel

- Berechnen des Mischungsverhältnisses von zwei Sorten bei vorgegebenen Preisen
- **Mischungskreuz-Regel:** Die zu mischenden Sorten sind im umgekehrten Verhältnis ihrer Preisdifferenzen zur Mischungsorte zu mischen.

In welchem Verhältnis müssen zwei Sorten (z. B. Tee; Sorte 1 kostet P_1 €/kg, Sorte 2 kostet P_2 €/kg) gemischt werden, damit die Mischsorte P_G €/kg kostet?

P :	Preis	Unterschied zu P_G berechnen	Anteil
M :	Menge, Anteil	und eventuell kürzen	
Sorte 1:	P_1 (€/kg)	$ P_G - P_1 $	M_1
Mischung:	P_G (€/kg)		
Sorte 2:	P_2 (€/kg)	$ P_G - P_2 $	M_2
Probe:	$M_1 \cdot P_1 + M_2 \cdot P_2 = (M_1 + M_2) \cdot P_G$		

Es gilt also:

$$\frac{|P_G - P_2|}{|P_G - P_1|} = \frac{M_1}{M_2}$$

7 Prozent- und Zinsrechnung

7.1 Prozentrechnung

Grundbegriffe

- Grundwert: G
Prozentwert: W
Prozentzahl: p

- Prozentsatz: $p\%$ $p\% = \frac{p}{100}$

- Promillesatz: $p\text{‰}$ $p\text{‰} = \frac{p}{1000}$ Umrechnung: $1\% = 10\text{‰}$

Grundgleichung der Prozentrechnung

$$G : 100 = W : p \text{ oder } \frac{G}{100} = \frac{W}{p}$$

$$\text{Daraus folgt: } W = \frac{p \cdot G}{100} \quad p = \frac{W \cdot 100}{G} \quad G = \frac{W \cdot 100}{p}$$

BESONDERS NÜTZLICH

„Bequeme“ Prozentsätze

Mit diesen Prozentsätzen lässt sich besonders leicht rechnen, weil sie als einfache Brüche darstellbar sind. Daher eignen sie sich auch für Berechnungen im Kopf.

Prozentsatz	1%	2%	$2\frac{1}{2}\%$	$3\frac{1}{3}\%$	4%	5%	$6\frac{1}{4}\%$	$6\frac{2}{3}\%$	10%	$12\frac{1}{2}\%$
Anteil am Grundwert	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$
Prozentsatz	20%	25%	30%	$33\frac{1}{3}\%$	40%	50%	60%	$66\frac{2}{3}\%$	75%	80%
Anteil am Grundwert	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
Prozentsatz	90%	100%	125%	150%	200%	300%	400%	500%	600%	700%
Anteil am Grundwert	$\frac{9}{10}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5	6	7

7.2 Zinsrechnung

Grundbegriffe

K	Kapital	#	Zinszahl ($\# = \frac{1}{100} \cdot K \cdot t$)
Z	Zinsen	q	Zinsfaktor ($q = \frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$)
R	Rate, Rente	D	Zinsdivisor ($D = \frac{360}{p}$)
$p \%$	Zinssatz des Kapitals	t	Anzahl der Tage
p. a.	per annum (pro Jahr)	m	Anzahl der Monate
S	Schuld, Darlehen	n	Anzahl der Jahre

Zinsen in verschiedenen Zeiträumen

Jahreszinsen	$Z = \frac{K \cdot p}{100}$	$Z_n = \frac{K \cdot p \cdot n}{100}$
Monatszinsen	$Z_m = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$	
Tageszinsen (Diskont)	$Z_t = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{\#}{D}$	
Rendite (effektive Jahresverzinsung)	$p = \frac{Z \cdot 100}{K}$	
Zinsseszinsen (Endwert K_n des Anfangskapitals K_0 nach n Jahren)	$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$	$n = \frac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg q}$

1 Jahr = 360 Tage; 1 Monat = 30 Tage (im deutschen Bankwesen)

BESONDERS NÜTZLICH

„Bequeme“ Zinsdivisoren (Zinsteiler)

Diese Zinsteiler sind sinnvoll zur Berechnung von Tageszinsen und des Diskonts.

Zinssatz	0,5 %	1 %	2 %	$2\frac{1}{2}$ %	$2\frac{2}{3}$ %	3 %	$3\frac{1}{3}$ %	$3\frac{3}{4}$ %	4 %
Zinsdivisor	720	360	180	144	135	120	108	96	90
Zinssatz	$4\frac{1}{2}$ %	5 %	6 %	$6\frac{2}{3}$ %	$7\frac{1}{2}$ %	8 %	9 %	10 %	12 %
Zinsdivisor	80	72	60	54	48	45	40	36	30

GLEICHUNGSLEHRE

1 Äquivalenzumformungen von Gleichungen und Ungleichungen	34
■ BESONDERS NÜTZLICH Formeln	35
2 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	36
2.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen	36
2.2 Lineare Gleichungssysteme aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen	36
2.3 Lineare Gleichungssysteme aus drei Gleichungen mit drei Variablen	37
3 Quadratische Gleichungen	38
4 Gleichungen höheren Grades	39
■ BESONDERS NÜTZLICH Erraten einer Nullstelle	40

1 Äquivalenzumformungen von Gleichungen und Ungleichungen

BLICKPUNKT

Variable

Eine Variable ist ein Zeichen für ein Objekt aus einer Menge gleichartiger Objekte. Diese Menge heißt der Grundbereich G oder der Variablengrundbereich.

Variablen werden meist durch Buchstaben (a, b, x, y, t, g, A, M) dargestellt.

$n \in \mathbb{N}$ Die Variable n ist ein Zeichen für eine beliebige Zahl aus dem Grundbereich \mathbb{N} (Menge der natürlichen Zahlen).

Term

Ein Term ist eine sinnvolle mathematische Zeichenreihe ohne Relationszeichen.

Terme, die den gleichen Wert haben, heißen gleichwertig. Dies ist abhängig vom jeweiligen Grundbereich.

Terme: $6a + \frac{3}{4}a$ $x^2 - y^2$ $\cos y$

keine Terme: $4 > 2$ $3 \cdot x = 21$ $4a - a \neq 23$

gleichwertige Terme: $24 : 6$ und $2 \cdot 2$ $x - 2$ und $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ für $G = \mathbb{N}$, aber nicht für $G = \mathbb{Z}$

Gleichung

Verbindet man zwei Terme mit einem Gleichheitszeichen, entsteht eine Gleichung.

$8x + 72 = 3x + 2$ $6x^2 - 12 = 42$

Ungleichung

Eine Ungleichung entsteht, wenn zwei Terme durch eines der Zeichen $<$; $>$; \leq ; \geq oder \neq verbunden werden.

$3x + 4 \leq 18$ $8x > 18 - x$

Grundbereich

Alle Zahlen oder Größen, die anstelle der Variablen eingesetzt werden können, bilden den Grundbereich.

Je nach Aufgabenstellung gilt z. B. $G = \mathbb{N}$; $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{Q}$.

Lösungsmenge

Alle Elemente des Grundbereiches, die beim Einsetzen in die Gleichung oder Ungleichung eine wahre Aussage ergeben, bilden die Lösungsmenge.

$3x + 1 = 13$ $G = \mathbb{N}$ $L = \{4\}$

Bruchgleichung

Eine Gleichung wird genau dann zur Bruchgleichung, wenn sie mindestens einen Bruchterm enthält, d. h., wenn die Variable mindestens einmal im Nenner eines Bruches erscheint.

Zum Grundbereich gehören alle Zahlen oder Größen, bei deren Einsetzen der Wert des Nenners des Bruchterms ungleich Null ist.

$\frac{4}{5-y} = 4$ $G = \mathbb{Q} \setminus \{5\}$ $L = \{4\}$

Äquivalenz und Äquivalenzumformungen

Zwei Gleichungen (Ungleichungen) nennt man bezüglich eines Zahlenbereiches zueinander äquivalent, wenn sie in diesem Zahlenbereich die gleiche Lösungsmenge besitzen. Es seien T_1 und T_2 Terme, die auf der linken bzw. rechten Seite einer Gleichung (Ungleichung) stehen. Dann gilt bei der

Addition oder Subtraktion gleicher Terme T auf beiden Seiten der Gleichung (Ungleichung):

$$\begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ T_1 < T_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} T_1 \pm T = T_2 \pm T \\ T_1 \pm T < T_2 \pm T \end{array} \quad \text{Das Relationszeichen bleibt gleich.}$$

$$\begin{array}{l} 4x - 1 = 8 \\ 4x = 9 \end{array} \quad | +1 \quad \quad \quad \begin{array}{l} 3 - x < -2 \\ -x < -5 \end{array} \quad | -3$$

Multiplikation oder Division beider Seiten der Gleichung (Ungleichung) mit einem Term $T > 0$:

$$\begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ T_1 < T_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} T_1 \cdot T = T_2 \cdot T \\ T_1 : T = T_2 : T \\ T_1 \cdot T < T_2 \cdot T \\ T_1 : T < T_2 : T \end{array} \quad \text{Das Relationszeichen bleibt gleich.}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}x = 8 \\ x = 16 \end{array} \quad | \cdot 2 \quad \quad \quad \begin{array}{l} 4x < 16 \\ x < 4 \end{array} \quad | : 4$$

Multiplikation oder Division beider Seiten der Gleichung (Ungleichung) mit einem Term $T < 0$:

$$\begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ T_1 < T_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} T_1 \cdot T = T_2 \cdot T \\ T_1 : T = T_2 : T \\ T_1 \cdot T > T_2 \cdot T \\ T_1 : T > T_2 : T \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Das Relationszeichen „<“ muss durch} \\ \text{„>“ ersetzt werden.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2x = 4 \\ x = -2 \end{array} \quad | : (-2) \quad \quad \quad \begin{array}{l} -x < -5 \\ x > 5 \end{array} \quad | : (-1)$$

BESONDERS NÜTZLICH**Formeln**

Für das Umstellen von Variablen in Formeln gelten die gleichen Regeln wie beim Umformen von Gleichungen. Mit Variablen wird wie mit Zahlen und Größen gerechnet.

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h \quad \text{nach } c \text{ umstellen:}$$

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h \quad | \cdot 2$$

$$2A = (a+c) \cdot h \quad | : h$$

$$\frac{2A}{h} = a+c \quad | -a$$

$$c = \frac{2A}{h} - a$$

2 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

2.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Lösen linearer Gleichungen		
■ Lösen der Gleichung	Gleichungen kann man lösen, indem man z. B. durch Anwenden der Umformungsregeln diese Gleichungen vereinfacht.	
■ Normalform:	$ax + b = 0$	$a, b \in \mathbb{R}$
■ Lösung x , Lösungsmenge L	$x = -\frac{b}{a}$ $L = \{-\frac{b}{a}\}$	$a \neq 0$

2.2 Lineare Gleichungssysteme aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen

Gleichungssysteme		
■ Normalform:	(I) $a_1x + b_1y = c_1$	$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$
	(II) $a_2x + b_2y = c_2$	$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ konstant
■ Lösungsformeln:	$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$	$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ $(a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0)$

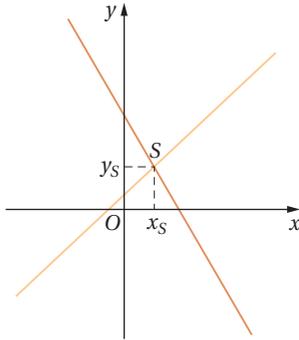
Rechnerische Lösungsverfahren		
Einsetzungsverfahren:	(I)	eine Gleichung nach x auflösen
	(II)	den Term für x in die andere Gleichung einsetzen
	(III)	Lösung für y in der Gleichung aus (II) ermitteln
	(IV)	y in die Gleichung aus (I) einsetzen und x ermitteln
Gleichsetzungsverfahren:	(I), (II)	beide Gleichungen nach einer Variablen auflösen (z. B. nach x)
	(III)	den Term für x aus (I) und aus (II) gleichsetzen und y ermitteln
	(IV)	y in eine Ausgangsgleichung einsetzen und x ermitteln
Additionsverfahren:	(I)	beide Gleichungen addieren bzw. subtrahieren, um eine Gleichung mit nur einer Variablen (z. B. y) zu erhalten
	(II)	diese Gleichung nach y auflösen
	(III)	y in eine Ausgangsgleichung einsetzen und x ermitteln

Grafisches Lösungsverfahren

Gleichungssysteme kann man grafisch lösen, indem man die Graphen der zu den beiden linearen Gleichungen gehörigen linearen Funktionen in einem Koordinatensystem zeichnet.

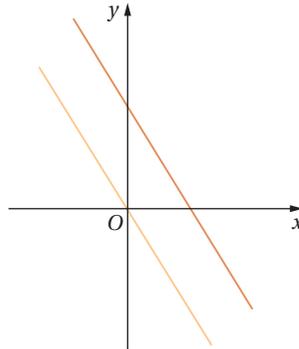
1. Fall

Geraden schneiden einander
im Punkt $S(x_S; y_S)$.
 $L = \{(x_S; y_S)\}$
genau eine Lösung



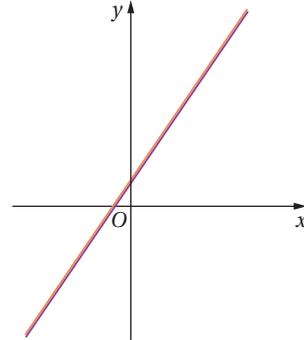
2. Fall

Geraden sind zueinander
parallel.
 $L = \emptyset$
keine Lösung



3. Fall

Geraden fallen zusammen.
 $L = \{(x; y)\}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und
 $y = mx + n$
unendlich viele Lösungen



2.3 Lineare Gleichungssysteme aus drei Gleichungen mit drei Variablen

Gleichungssysteme

■ Normalform:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \text{(II)} & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \text{(III)} & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 \in \mathbb{R} \\ a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 \text{ konstant} \end{array}$$

Rechnerisches Lösungsverfahren

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 3x - y - z = 1 \\ \text{II} \quad 4y - 8z = -4 \\ \text{III} \quad z = 1 \end{array}$$

Da $z = 1$ ist, kann man diesen Wert in II einsetzen und y bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} \text{II} & 4y - 8 \cdot 1 = -4 & | +8 \\ & 4y = 4 & | :4 \\ & y = 1 & \end{array}$$

Jetzt werden die Werte für y und z in I eingesetzt, um x zu ermitteln.

$$\begin{array}{rcl} \text{I} & 3x - 1 - 1 = 1 & | +2 \\ & 3x = 3 & | :3 \\ & x = 1 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{(1; 1; 1)\}$

3 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen und Lösungsformel

Allgemeine Form der quadratischen Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}; a, b, c \text{ konstant}; a \neq 0$$

Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = \frac{b}{a}; q = \frac{c}{a}$$

$$p, q \in \mathbb{R}$$

■ Lösung

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad D = \frac{p^2}{4} - q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad (\text{Diskriminante})$$

■ Anzahl der Lösungen

$$D > 0$$

$$D = 0$$

$$D < 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

$$\sqrt{D} \text{ für } D < 0 \text{ n. def.}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

zwei Lösungen

eine Lösung

keine Lösung

$$L = \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{D}; -\frac{p}{2} - \sqrt{D} \right\}$$

$$L = \left\{ -\frac{p}{2} \right\}$$

$$L = \{ \}$$

■ Satz von Vieta

$$x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Anwendungen

– Berechnen der zweiten Lösung, wenn eine Lösung bekannt ist

$$x^2 - 12x + 32 = 0 \quad x_1 = 4 \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad 4 \cdot x_2 = 32 \quad x_2 = 8$$

– Durchführen der Probe

$$x^2 - 12x + 32 = 0; x_1 = 4; x_2 = 8 \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad 4 \cdot 8 = 32 \\ x_1 + x_2 = -p \quad 4 + 8 = -(-12)$$

– Berechnen von p und q

$$x^2 + px + q = 0; x_1 = 4; x_2 = 8 \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad 4 \cdot 8 = 32 \quad q = 32 \\ x_1 + x_2 = -p \quad 4 + 8 = 12 \quad p = -12$$

■ Sonderfälle

$$p = 0; q = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$L = \{0\}$$

$$p \neq 0; q = 0$$

$$x^2 + px = 0$$

$$L = \{0; -p\}$$

$$x(x + p) = 0$$

$$p = 0; q \neq 0$$

$$x^2 + q = 0$$

wenn $q > 0$: keine Lösung in \mathbb{R}

wenn $q < 0$: $L = \{-\sqrt{|q|}; \sqrt{|q|}\}$

Register

A

Abbildung
 – identische 43
 Ableitung 83ff.
 – Ableitungsfunktion 83
 – Ableitungsregeln 84
 – erste Ableitung 83
 – höhere Ableitungen 84
 – Sinus- und Kosinusfunktion 84
 Abrunden 7
 absoluter Nullpunkt 112
 Abstand zweier Punkte 61
 Abszisse 68
 Abszissenachse 68
 Abweichung
 – mittlere 98
 Addition 20
 – gleicher Terme 35
 – positiver und negativer Zahlen 23
 – von Brüchen 22
 – von Vektoren 63
 Additionstheoreme 75
 Additionsverfahren 36
 ähnliche Figur 44
 Ähnlichkeit 43
 Aktivität einer radioaktiven Substanz 113
 Algorithmus
 – euklidischer 21
 Amplitude 113
 Ankathete 75
 Anstieg 69
 Änderungsrate 80
 Äquivalenz 35
 Äquivalenzumformungen 35
 – von Gleichungen 35
 – von Ungleichungen 35
 Arbeit 113
 – elektrische 113
 – mechanische 113
 Argumente 66
 Assoziativgesetz 24, 63
 atomare Masseinheit 112
 Atommasse
 – relative 113
 Aufrissebene 58
 Aufrunden 7
 Auftriebskraft 114
 Ausklammern 25

Auslenkung 113
 Ausmultiplizieren 25
 Außenwinkelsatz 46
 Avogadro-Konstante 112
 Avogadro-Zahl 112

B

Balkendiagramm 99
 Basis 26, 27
 – gleiche 26
 – spezielle 27
 Basiseinheiten 12
 Basiswechsel 27
 Baumdiagramm 96
 Bernoulli-Experiment 95
 Berührungsradius 50
 Beschleunigung 113
 Bild 57
 Bildebene 57
 Bildpunkt 57
 binäres System 119
 Binomialkoeffizienten 88, 89
 Binomische Formeln 24, 89
 Bit 119
 Bogenmaß 74
 Boxplot 100
 Breitenstrecke 59
 Brennweite 113
 Bruch 22
 Brüche
 – Addition 22
 – Division 22
 – gleichnamige 22
 – Multiplikation 22
 – Subtraktion 22
 – ungleichnamige 22
 Bruchgleichung 34
 Bruchoperationen 22
 Bruchrechnung 22
 Byte 120

C

Cauchy 28

D

Darlehen 32
 Darstellungsarten statistischer Größen 98, 99
 Datendarstellung 119
 Deckflächeninhalt 52
 Definitionsbereich 66

dekadischer Logarithmus 27
 Dezimalzahlen 121
 – Darstellung 8
 Dichte 113
 Differenzenquotient 83
 Differenzialquotient 83
 Differenzierbarkeit 83
 direkte Proportionalität 28
 Diskont 32
 Diskriminante 38, 71
 Distributivgesetz 24
 Division 20
 – positiver und negativer Zahlen 23
 – von Brüchen 22
 Drachenviereck 49
 Drehmoment 113
 Drehzahl 113
 Dreieck
 – allgemeines 48
 – Außenwinkel eines 46
 – besondere Linien im 47
 – gleichseitiges 48
 – Innenwinkel eines 46
 – rechtwinkliges 48
 – Winkel am 46
 Dreiecke
 – Ähnlichkeitssätze für 44
 – Kongruenzsätze für 44
 Dreiecksäule 53
 Dreiecksungleichung 48
 Dreisatz 29
 – bei direkter Proportionalität 29
 – bei indirekter Proportionalität 29
 Druck 113
 Dualsystem 119
 – Einheiten der Datendarstellung im 119
 Dualzahlen 121
 Durchmesser 50
 Durchschnitt 97
 Durchschnittsmenge 17
 dyadisches System 119

E

e 27, 80
 Ebene 42
 Einheiten 12ff., 113ff.
 – abgeleitete 12

- der Arbeit 116
- der Energie 116
- der Fläche 13
- der Geschwindigkeit 14
- der Länge 13
- der Leistung 116
- der Masse 13
- der Temperatur 14
- der Wärme 116
- der Zeit 14
- des Drucks 116
- des Rauminhalts 13
- des Volumens 13
- Umrechnen von 13
- Vorsätze bei 12
- Einheitensystem 12
- Einsetzungsverfahren 36
- Elektron 112
 - Masse (Ruhemasse) 112
 - Ladung 112
- Elementarereignis 93
- Elementarladung 112
- empirisches Gesetz der großen Zahlen 94
- Energie 113
- Ereignis 93
 - abhängig 96
 - Additionssatz für einander ausschließende 95
 - Additionssatz für zwei 95
 - Beschreibung von 93
 - Mengenbeziehung bei 95
 - sicheres 93
 - unabhängig 96
 - unmögliches 93
- Ergebnismenge 93
- Erweitern 22
- euklidischer Algorithmus 21
- eulersche Zahl 27, 80
- Exponent 26
 - gleicher 26
- Exponentialfunktionen 79
- Extrempunkte 85, 86
 - und die erste Ableitung 85
 - und die zweite Ableitung 86
- Extremstelle 85
- Extremum 85
 - globales 85
- F**
- Fakultät 88
- Faktorregel 84
- Fallbeschleunigung 112, 114
- Figur, ähnlich 44
- Fläche 114
- Flächeninhalt
 - Kreis 50, 106
- Flächenmaße 13, 15
- Formeln 35
 - binomische 24, 89
- Frequenz 114
- Funktion 66
 - Arten von 69ff.
 - Eigenschaften von 67, 82
 - gerade 72, 82
 - grafische Darstellung von 68
 - inverse 73
 - konstante 69
 - lineare 69
 - monoton fallend 67, 82
 - monoton wachsend 67, 82
 - nichtrationale 73
 - periodische 67, 82
 - proportionale 69
 - quadratische 70, 71
 - streng monoton fallend 82
 - streng monoton wachsend 67, 82
 - umgekehrt proportionale 72
 - ungerade 72, 82
- Funktionsgleichung 67
- Funktionswerte 66
- G**
- Ganzrationale Funktionen 81
- GByte 120
- Gegenereignis 93
- Gegenkathete 75
- Gegenvektor 62
- Gegenzahl 23
- Geodreieck 47
- Gerade 42, 64
 - Lage von 64
- Geschwindigkeit 114
- Geschwindigkeitsmaße 14
- Gesetz der großen Zahlen 94
- Gewichtskraft 114
- ggT 20
- gleichnamige Brüche 22
- Gleichsetzungsverfahren 36
- Gleichungen 34
 - Äquivalenz von 35
 - Äquivalenzumformungen 35
 - dritten Grades 39
 - höheren Grades 39
 - lineare 36
 - quadratische 38
 - vierten Grades 40
- Gleichungslehre 33
- Gleichungssysteme
 - für Geradengleichungen 64
 - lineare 36, 37
 - Lösungsformeln 36
 - Normalform 36, 37
- Gleichverteilung 94
- Glied
 - konstantes 70
 - lineares 70
 - quadratisches 70
- goldener Schnitt 29
- Grad-/Bogenmaß
 - Umrechnungen 74, 103
- Gradmaß 74
- Graph 68
- Gravitationskonstante 112
- Grundbereich 34
- Grundeinheiten 13
- Grundflächeninhalt 52
- Grundkonstruktion 42
- Grundrechenoperationen 17
- Grundriss 58
- Grundrissebene 58
- Grundsymbbole (röm. Zahlen) 6
- Grundwert 31
- H**
- Halbwertszeit 114
- Häufigkeit
 - absolute 94
 - relative 94
- Heizwert 114
- Hexadezimalsystem 120
- Hexadezimalzahlen 121
- Hilfssymbole (röm. Zahlen) 6
- Hochachse 68
- Hochpunkt 85
- Höhe 47, 114
- Höhensatz 48
- Höhenschnittpunkt 47
- Höhenstrecke 59
- Hohlzylinder
 - gerader 55
- Hyperbel 72, 73
- I**
- indirekte Proportionalität 28, 29
- Inkreismittelpunkt 47
- Innenwinkelsatz 46
- Intervall 18
 - abgeschlossenes 18
 - linksoffenes 18
 - offenes 18
 - rechtsoffenes 18

- J**
 Jahresverzinsung
 – effektive 32
 Jahreszinsen 32
- K**
 Kantenlänge 52
 Kapital 32
 Kapital, Zinssatz des 32
 Kartesisches Koordinatensystem 68
 Kathetensatz 48
 Kavalierperspektive 59
 kByte 120
 Kegel 55
 Kehrwert 22
 Kehrzahl 23
 Kettensatz 30
 kgV 20
 Klammern
 – Rechnen mit 25
 Klammerregeln 25
 Klassenbildung 99
 Kombination
 – mit Wiederholung 91
 – ohne Wiederholung 91
 Kombinatorik 88ff.
 Kommutativgesetz 24, 63
 Komplementärmenge 93
 Konstante 112
 Koordinaten 61, 68
 – eines Vektors 62
 Koordinatenebenen 61
 Koordinatensystem 61, 68
 – Kartesisches 68
 – mit drei Achsen 61
 Koordinatenursprung 68
 Körper
 – geometrischer 57
 – perspektivische Darstellung von 118
 Körper mit ebenen Begrenzungsflächen 52
 Körper mit gekrümmten Begrenzungsflächen 55
 Körperdiagonale 52
 Körperhöhe 52
 Körperkante 118
 Körpernetz 57
 Kosinusfunktion 76, 77
 – Ableitung 84
 – Periodizität der 76
 Kosinussatz 78
 Kosinus-Sinus-Tafel 108, 109
 Kraft 114
 Kreis 50, 51
 – Linien am 50
 – Winkel am 51
 Kreisausschnitt 51
 Kreisbogen 51
 Kreisdiagramm 100
 Kreiskegel
 – gerader 55
 Kreisring 51
 Kreiszahl 50
 Kreiszyylinder
 – gerader 55
 Kubikwurzel 26, 102
 Kubikzahl 102
 Kugel 56
 Kugelausschnitt 56
 Kugelsektor 56
 Kurvendiskussion 86
 Kürzen 22
- L**
 Ladung
 – elektrische 114
 – Elektron 112
 Länge 114
 Längenausdehnungskoeffizient 114
 Längenmaße 13, 14
 Laplace-Formel 94
 Lautstärke 114
 Lautstärkepegel 114
 Leistung 114
 Lichtgeschwindigkeit im Vakuum 112
 Linearfaktorzerlegung 39
 Linearkombination von Vektoren 63
 Linie 42
 Linienarten 117
 Liniengruppe 117
 Logarithmengesetze 27
 Logarithmieren 20, 27
 Logarithmus
 – dekadisches 27
 – natürlicher 27
 Logarithmusfunktionen 79
 – Beispiele für Werte von 79
 Lösungsmenge 34
 Lösungsverfahren
 – grafisches 37
 – rechnerische 36, 37
- M**
 Mantelflächeninhalt 52
 Maße
 – nichtdezimale 14, 15
 Masse 115
 Massemaße 13, 15
 Maßhilfslinie 118
 Maßlinie 118
 Maßlinienbegrenzung 118
 Maßstäbe, standardisierte 117
 Maßzahl 13, 118
 Maximum 85
 MByte 120
 Median 97
 Menge 16
 – Elemente der 16
 Menge geordneter Paare 67
 Mengenbegriff 16
 Mengenbeziehungen 16, 17
 Mengengleichheit 16
 Mengenlehre 16, 17
 Mengenverknüpfungen 16
 Minimum 85
 Minusklammerregel 25
 Mischungskreuz-Regel 30
 Mischungsrechnen 30
 Mittel
 – arithmetisches 28, 97
 – geometrisches 28
 – harmonisches 28
 Mittelpunktswinkel 51
 Mittelsenkrechte 42, 47
 Mittelwert 97
 – Zusammenhänge zwischen 28
 Monatszinsen 32
 Monotonie 67, 82, 84
 Multiplikation 20
 – eines Vektors mit einer Zahl 63
 – positiver und negativer Zahlen 23
 – von Brüchen 22
 Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten 96
- N**
 n -te Wurzel 26
 Näherungswerte 7ff.
 – Addition 8
 – Division 8
 – Multiplikation 8
 – Subtraktion 8
 Naturkonstante 112
 Nebenwinkel 45
 n -Eck
 – Innenwinkel eines 46
 – regelmäßiges 50
 – Winkel am 46

- Nenner 22
 Netz eines Körpers 57
 Neugrad 74
 Neutron, Ruhemasse 112
 nichtrationale Funktionen 73
 normaler Luftdruck 112
 Normalparabel 70
 Normdruck 112
 Normtemperatur 112
 Nullstelle von Funktionen 66
 - Erraten 40
 - von ganzrationalen Funktionen 81
 Nullvektor 60
 Nullwinkel 45
 Numerus 27
- O**
- Oberflächeninhalt 52
 Ordinate 68
 Ordinatenabschnitt 69
 Ordinatenachse 68
 Ordnungslinie 58
 Original 57
 Ortsfaktor 112, 114
 Ortsvektor 62
- P**
- π 50
 Parabel 70, 71, 72, 81
 - Form der 70
 - Öffnung der 70
 Parallelenabschnitte 43
 Parallelogramm 49
 Parallelprojektion 57, 58
 Passante 50
 per annum 32
 Periode 76, 82
 Periodendauer 115
 Periodizität 76, 82
 Peripheriewinkel 51
 Permutation 88, 90
 Pfadregeln 96
 Pfeildarstellung 67
 Planimetrie 42ff.
 Plusklammerregel 25
 Polynomdivision 39
 Positionssystem
 - dekadisches 20
 Potenzen 26
 Potenzfunktionen 72, 73
 - Typen von 72, 73
 Potenzfunktionen n -ten Grades 72
 Potenzgesetze 26
 Potenzieren 20, 26
- Potenzrechnung mit dem Taschenrechner 10
 Potenzregel 84
 Primfaktorzerlegung 20, 104
 Primzahl 104
 Prisma 52, 53
 - mit trapezförmiger Grundfläche 53
 - regelmäßiges dreiseitiges 53
 produktgleich 28
 Projektion
 - dimetrische 118
 - frontal-dimetrische 118
 - isometrische 118
 Projektionsarten 57
 Projektionsstrahlen 57
 Promillesatz 31
 Proportionalität
 - direkte 28, 29
 - indirekte (umgekehrte) 28, 29
 Proportionalitätsfaktor 28
 Proton 112
 Prozenkreis 100
 Prozentrechnung 31
 - Grundgleichung der 31
 Prozentsatz 31
 Prozentstreifen 100
 Prozentwert 31
 Prozentzahl 31
 Punkte 42
 - Abstand von 61
 - Lage von 61, 68
 - Punktrechnung, vor Strichrechnung 10, 25
 Punktrichtungsgleichung 64
 Pyramide
 - gerade quadratische 53
 - Tetraeder 54
 Pyramidenstumpf
 - quadratischer 54
 - regelmäßiger dreiseitiger 54
 Pythagoras, Satz des 48
- Q**
- Quader 52
 Quadrat 26, 48, 49
 quadratische Gleichungen 38
 - allgemeine Form 38
 - Normalform 38
 - Satz von Vieta 38
 - Sonderfälle 38
 Quadratwurzel 26, 102
 Quadratzahl 102
- Quadrieren 20
 Quersumme 21
 quotientengleich 28
- R**
- Radiant 74, 103
 Radikand 26
 Radius 50
 Radizieren 20
 Rate 32
 Rauminhalt 52
 Raummaße 13, 15
 Raute 48, 49
 Rechengesetze 24
 Rechenoperationen 20
 Rechteck 48, 49
 Rechtsachse 68
 Reibungskraft 114
 Reibungszahl 115
 Rendite 32
 Rente 32
 Repräsentant 62
 Rhombus 48, 49
 Richtungsvektor 64
 Ringbreite 51
 Rissachse 58
 Römische Zahlzeichen 6
 Ruhemasse 112
 Runden 7
 Rundungsregeln 7
- S**
- Sattelpunkt 85
 Satz
 - binomischer 89
 - des PYTHAGORAS 48
 - des THALES 51
 Säulendiagramm 99
 Schaubild 68
 Scheitelpunkt 70
 Scheitelpunktform 71
 Scheitelwinkel 45
 Schnittmenge 17
 Schrägbild 59
 Schuld 32
 Schwerpunkt 47
 Schwingungsdauer 115
 Sechseck
 - regelmäßiges 50
 Sehne 50
 Sehnentangentenwinkel 51
 Seitenhalbierende 47
 Sekante 50
 Senkrechte 42
 SI-Einheiten 112
 Simulation 93

- Sinusfunktion 76, 77
 – Ableitung 84
 – Periodizität der 76
 Sinus-Kosinus-Tafel 108, 109
 Sinussatz 78
 Spannung, elektrische 115
 Spannweite 98
 spezifische Ladung 112
 Stabdiagramm 99
 Stamm-Blätter-Diagramm 98
 Standardabweichung 98
 Stängel-Blatt-Diagramm 98
 Statistik
 – beschreibende 97ff.
 – Darstellungsarten in der 98ff.
 – Lagemaße in der 97, 98
 – Streumaße in der 97, 98
 Steigung 69
 Steigungsfaktor 69
 Stereometrie 42ff., 52
 Stichprobe
 – Umfang der 97
 Stichprobenraum 93
 Strahlenabschnitte 43
 Strahlensätze 43
 Streckung
 – zentrische 43
 Streifendiagramm 100
 Streubreite 98
 Streumaße 98
 Strichliste 98
 Stromstärke, elektrische 115
 Stufenwinkel 45
 Stützvektor 64
 Substitution 40
 Subtraktion 20
 – gleicher Terme 35
 – positiver und negativer Zahlen 23
 – von Brüchen 22
 – von Vektoren 63
 Summen
 – Multiplikation von 25
 Summenregel 84, 95
 Symbole (röm. Zahlen) 6
 Symmetrie 82
- T**
 Tageszinsen 32
 Tangensfunktion 77
 Tangente 50, 83
 Taschenrechner 9
 – Abschluss 9
 – Brüche 10
 – Logarithmieren 10
 – Löschen 9
 – Prozenttaste 10
 – Quadrieren 10
 – Speichern 9
 – Winkelfunktionen 11
 – Wurzelziehen 10
 – Zahleneingabe 9
 Teilbarkeitsbeziehungen 21
 Teilbarkeitseigenschaften 21
 Teilbarkeitsregeln 21
 Teiler 20
 – gemeinsamer 20
 – größter gemeinsamer 20
 teilerfremd 21
 Teilmenge 16
 Teilmenge, echte 16
 Temperatur 115
 Term 34
 – gleichwertige 34
 Termumformungen 24
 Tetraeder 54
 Tiefpunkt 85
 Thales
 – Satz des 51
 Tiefstrecke 59
 Trapez 49
 Trapezsäule 53
- U**
 Umfangswinkel 51
 Umformungsregeln 35
 umgekehrte
 Proportionalität 28, 29
 Umkehrbarkeit 82
 Umkehrfunktion 73, 74, 79, 82
 Umkreismittelpunkt 47
 Umrechnungen zwischen
 Einheiten 116
 Ungleichung 34
 Ungleichungen
 – Äquivalenz von 35
- V**
 Variable 34
 Variablengrundbereich 34
 Varianz 98
 Variation
 – mit Wiederholung 90
 – ohne Wiederholung 90
 Variationsbreite 98
 Vektoren 61ff.
 Verbindungsgesetze 24
 Vereinigungsmenge 17
 Vergrößerung 117
 – maßstäbliche 43
 Verhältnisgleichung 28
 Verkleinerung 117
 – maßstäbliche 43
 Verkürzungsverhältnis 59
 Vertauschungsgesetz 24
 Verteilungsgesetz 24
 Verzerrungsverhältnis 59
 Verzerrungswinkel 59
 Vielecke
 – regelmäßige 50
 Vielfaches 20
 – gemeinsames 20
 – kleinstes
 gemeinsames 20
 Viereck 48
 – Innenwinkel eines 46
 – Winkel am 46
 Vierecksarten 49
 Vollwinkel 45
 Volumen 52, 115
 Vorgang
 – zufälliger 93
 Vorrangautomatik 10
 Vorrangregeln 25
- W**
 Wachstum 80
 – exponentielles 80
 – lineares 80
 – negatives 80
 Wachstumsfaktor 80
 wahre Länge 60
 Wahrscheinlichkeit 94, 95
 – bedingte 96
 – Eigenschaften 94, 95
 – klassische 94
 Wahrscheinlichkeitsrechnung
 92ff.
 – Grundbegriffe der 93
 Wahrscheinlichkeitsverteilung
 94
 Wärme 115
 Wechselwinkel 45
 Weg 115
 Wellenlänge 115
 Wert
 – reziproker 22
 Wertebereich 66
 Wertetabelle 67
 Widerstand
 – elektrischer 115
 – spezifischer
 elektrischer 115
 Winkel 45
 – gestreckter 45
 – rechter 45
 – spitzer 45

- stumpfer 45
 - überstumpfer 45
 - Winkel an ebenen Figuren 46
 - Winkel an geschnittenen Geraden 45
 - Winkelarten 45, 51
 - Winkelfunktionen 74ff.
 - Anwendungen von 78
 - Definition von 75
 - Eigenschaften von 75ff.
 - Vorzeichen der Werte von 78
 - Werte für spezielle Argumente 77
 - Zusammenhänge zwischen 75
 - Winkelhalbierende 42, 47
 - Winkelmaße 74
 - Wirkungsgrad 115
 - Word 120
 - Wortvorschrift 67
 - Würfel 52
 - Wurzel 26
 - Wurzelexponent 26
 - Wurzelfunktionen 73, 74
 - Wurzelgesetze 26
 - Wurzelziehen 20
- X**
- x -Achse 61, 68
 - x -Wert 68
 - xy -Ebene 61
 - xz -Ebene 61
- Y**
- y -Achse 61, 68
 - y -Wert 68
 - yz -Ebene 61
- Z**
- z -Achse 61
 - Zahl
 - Betrag einer 23
 - entgegengesetzte 23
 - Zahlen
 - ganze 17
 - gebrochene 17
 - irrationale 17
 - natürliche 17
 - rationale 17
 - reelle 17
 - Zahlendreieck
 - pascalsches 89
 - Zahlengerade 68
 - Zahlenmenge 17
 - Zahlenpaar 67
 - Zähler 22
 - Zählmaße 16
 - Zahlzeichen
 - römische 6
 - Zehnerlogarithmus 27
 - Zehnerpotenz 8
 - abgetrennte 8
 - Zeit 115
 - Zentralprojektion 57
 - Zentralwert 97
 - Zentriwinkel 51
 - Zerfallsprozess 80
 - Ziehen
 - mit einem Griff 91
 - mit Zurücklegen 91
 - ohne Zurücklegen 91
 - Ziffern
 - zuverlässige 7
 - Zinsdivisoren 32
 - „Bequeme“ 32
 - Zinsen 32
 - Zinseszinsen 32
 - Zinsfaktor 32
 - Zinsrechnung 32
 - Zinsteiler 32
 - Zinszahl 32
 - Zufallsexperiment 93
 - mehrstufiges 96
 - Zufallsversuch 93
 - Zufallszahlen 110
 - Zuordnung
 - eindeutige 66
 - proportionale 66
 - umgekehrt proportionale 66
 - Zuordnungen 66
 - Zuordnungsvorschrift 66
 - Zusammengesetzte Körper 56
 - Zusammenhang
 - proportionaler 69
 - Zweiersystem 119
 - Zweitafelprojektion
 - senkrechte 58