



Dies ist eine Leseprobe von Klett-Cotta. Dieses Buch und unser gesamtes Programm finden Sie unter [www.klett-cotta.de](http://www.klett-cotta.de)

\_\_\_\_Douglas R. Hofstadter\_\_\_\_

# Gödel, Escher, Bach

ein Endloses Geflochtenes Band

Aus dem Amerikanischen übersetzt von Philipp Wolff-Windegg,  
Hermann Feuersee und Hainer Kober  
unter Mitwirkung von Werner Alexi,  
Ronald Jonkers und Günter Jung

Mit einem Vorwort  
von Gero von Randow

\_\_\_\_\_Klett-Cotta\_\_\_\_\_

Klett-Cotta

www.klett-cotta.de

Die Originalausgabe erschien unter dem Titel  
„Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid“

© 1979 by Basic Books, New York

Für die deutsche Ausgabe

© J. G. Cotta'sche Buchhandlung Nachfolger GmbH, gegr. 1659,  
Stuttgart 1985

Fotomechanische Wiedergabe

nur mit Genehmigung des Verlages

Printed in Germany

Schutzumschlag: Klett-Cotta-Design

gesetzt aus der 9 Punkt ITC Weidemann

von Lihs, Satz und Repro, Ludwigsburg

Auf säure- und holzfreiem Werkdruckpapier gedruckt

und gebunden von Clausen & Bosse, Leck

ISBN 978-3-608-94442-6

17., um ein Vorwort erweiterte Neuausgabe, 2006

18. Auflage 2008

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische  
Daten sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar

# Inhalt

Das erste Exemplar einer ganz neuen Gattung (Gero von Randow) IX

Vorwort von Douglas R. Hofstaedter XV

Übersicht XLII

Danksagungen L

## Teil I: GEB

**Einleitung: Ein musiko-logisches Opfer 3**

Dreistimmige Invention 33

**Kapitel I: Das MU-Rätsel 37**

Zweistimmige Invention 47

**Kapitel II: Bedeutung und Form in der Mathematik 50**

Sonate für Achilles solo 66

**Kapitel III: Figur und Hintergrund 69**

Contrakrostipunktus 81

**Kapitel IV: Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Geometrie 90**

Kleines harmonisches Labyrinth 113

**Kapitel V: Rekursive Strukturen und Prozesse 137**

Kanon durch intervallische Augmentation 165

**Kapitel VI: Wo die Bedeutung sitzt 170**

Chromatische Phantasie und Fehde 191

**Kapitel VII: Die Aussagenlogik 198**

Krebs-Kanon 217

**Kapitel VIII: Theoria Numerorum Typographica 222**

Ein Mu-Opfer 250

**Kapitel IX: Mumon und Gödel 265**

## **Teil II: EGB**

Präludium und ... 297

### **Kapitel X: Beschreibungsebenen und Computersysteme 306**

... emsige Fuge 333

### **Kapitel XI: Gehirn und Denken 361**

Englisch-französisch-deutsche Suite 393

### **Kapitel XII: Geist und Denken 397**

Aria mit verschiedenen Veränderungen 420

### **Kapitel XIII: BlooP und FlooP und GlooP 436**

Die „Air“ in G 462

### **Kapitel XIV: Über formal unentscheidbare Sätze von TNT und verwandten Systemen 470**

Geburtstagskantatata... 494

### **Kapitel XV: Aus dem System hinausspringen 498**

Erbauliche Gedanken eines Tabakrauchers 514

### **Kapitel XVI: Selbst-Ref und Selbst-Rep 530**

Dd. Magnifikrebs 585

### **Kapitel XVII: Church, Turing, Tarski und andere 596**

SHRDLU bleibt meine Freude 624

### **Kapitel XVIII: Artificielle Intelligenz: Rückblicke 632**

Contrafaktus 675

### **Kapitel XIX: Artificielle Intelligenz: Aussichten 683**

Ai-Kanon 725

### **Kapitel XX: Seltsame Schleifen oder Verwickelte Hierarchien 728**

Ricercar zu sechs Stimmen 768

<b>Anmerkungen</b>	<b>793</b>
<b>Verzeichnis der Abbildungen</b>	<b>799</b>
<b>Quellennachweise</b>	<b>804</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>805</b>
<b>Nachbemerkung zur deutschen Ausgabe</b>	<b>820</b>
<b>Register</b>	<b>821</b>

# Gero von Randow

## Das erste Exemplar einer neuen Gattung

Als *Gödel Escher Bach*, seither GEB abgekürzt, im Jahr 1985 in deutscher Übersetzung erschien, war die hiesige Leserschaft schon einigermaßen auf dieses einzigartige Buch vorbereitet. Es existierte inzwischen eine Art Computerkultur, die nicht mehr nur in Rechenzentren anzutreffen war. Mit den ersten „Heimcomputern“ griff sie vielmehr aus in die Privatsphären, und das Programmieren war bereits Hobby geworden.

Von Hofstadters GEB hatte man hierzulande durchaus gehört, die amerikanische Ausgabe (1979) wurde schon länger herumgereicht und weiter verliehen, vor allem nachdem Douglas R. Hofstadter den Pulitzer-Preis 1980 erhalten hatte. Darüber hinaus war das intellektuelle Publikum in der Bundesrepublik für etliche der Hofstadterschen Motive sensibilisiert: Der „Positivismusstreit“ der sechziger Jahren wirkte noch nach und ließ sich auch als Diskussion um Reduktionismus und Holismus verstehen. Debatten über Künstliche Intelligenz kamen auf, das New Age waberte durch die Buchhandlungen, begleitet von furchterregend ernstesten Interpretationen des Zen-Buddhismus und der Musik von John Cage, obwohl doch beide ausgesprochen humoristische Hervorbringungen sind.

Dann platzte *Gödel Escher Bach* hinein, stürmte den ersten Platz der Bestsellerlisten und behielt ihn über Monate hinweg. Und man mag es gar nicht glauben, denn alles, was in diesem Buch steht, widersprach nachdrücklich und überzeugend dem damaligen Konsens unter deutschen Intellektuellen. Ferner war GEB ja nicht einmal ein ordentliches Sachbuch, sondern ein Ichweißnichts.

Sprach man in jener Zeit mit Interessierten, so stellte sich bald heraus, daß die meisten das Buch nicht gelesen hatten. Daher drängt sich der ungerechte Vergleich mit Stephen Hawkings „Eine kurze Geschichte der Zeit“ auf, einem Buch, dem Jahre später das gleiche Schicksal widerfahren sollte. Ungerecht ist der Vergleich, weil GEB mitnichten unverständlich ist. Wer das Buch begreifen will, muß sich allerdings Zeit nehmen und bereit sein, sich zu konzentrieren. Gelegentlich ist es besser, einen Stift zur Hand zu nehmen, denn GEB enthält formale Beispiele aus sehr unterschiedlichen Disziplinen. Dennoch setzt GEB keinerlei spezielle Kenntnisse voraus, weder der Mathematik noch der Philosophie noch der Musik noch der Computerei.

Denjenigen aber, die Mitte der Achtziger im Computer eine Herausforderung des Geistes und der Kultur sahen, kam das Buch wie Manna vom Himmel. Vielleicht auch gerade deshalb, weil es den Freunden des formenstrengen Denkens endlich das bot, was bis dahin der anderen Fraktion vorbehalten geblieben war, den Irrationalisten und

Wissenschaftsabholden: das Schwärmerische, Spielerische, Künstlerische, verrätselt Vielsagende.

Im Jahr 1982 und danach machten Benoît Mandelbrots Buch *The Fractal Geometry of Nature (Die fraktale Geometrie der Natur, 1977)* sowie die Computervisualisierungen des Chaos die Runde, mit denen der Bremer Mathematiker Heinz-Otto Peitgen später ein breites Publikum erreichen sollte, etwa mit dem Titel *Bausteine des Chaos: Fraktale* (1992). In diesen Büchern wird augenfällig gezeigt, daß aus Rückwirkungen von Regeln auf sich selber komplexe Strukturen entstehen können, und diese Strukturen erinnern auffällig an Bioformen. Da konstruierte sich vor unseren Augen am Bildschirm ein vielfältiges Ganzes, das unbestreitbar mehr war als die Summe seiner Teile, etwas, das vom Auge ganzheitlich erfaßt wurde – etwas offenkundig Holistisches, das gleichwohl Pixel um Pixel von einer Formel aufgebaut worden war, als entstamme es dem Paradies der Reduktionisten. Schlimmer noch: Mit Programmen dieser Art ließ sich etwas darstellen, das der Anschauung nur als „Chaos“ gelten konnte, jedoch durch und durch deterministisch war und sich als eins zu eins wiederholbar zeigte.

Dies waren die geistigen Voraussetzungen, auf die GEB traf. Schnell wurde es ein Kultbuch unter denen, die es gelesen hatten, und damit ist gemeint: GEB wurde stilprägend. Plötzlich holten wir wieder die Bach-Platten aus dem Schrank und hörten, wovon wir in GEB gelesen hatten. Mit einem Mal klang die Musik Bachs beziehungsreicher, als wir sie je zuvor wahrgenommen hatten. Wir schauten die Escher-Bilderbücher an, die in früheren Zeiten mit Joints und Pink-Floyd-Musik eine Art Trinität bildeten und mit ihnen verinnerlicht worden waren. Und siehe da, der zuvor nicht wirklich verstandene formale Zauber wirkte beseelend. Rekursive Wortspiele, augenzwinkernde Koans und hin und wieder Cage, sozusagen als Hintergrund der Bach-Figur: GEB wurde – kaum merklich – zu einer Lebensweise.

Und was hatte das alles mit Kurt Gödel zu tun? Die Erkenntnisse dieses Mathematikers mußten zu jener Zeit mehr als einmal dafür herhalten, Zweifel an den Wissenschaften zu begründen. Gödel hatte für immer und alle Zeiten das Bemühen der Mathematiker, seiner Fachkollegen, zum Einsturz gebracht, ihre Wissenschaft vollständig aus ein paar Axiomen aufzubauen. Er bewies ihnen nämlich, daß sich in der Sprache jedes nichttrivialen formalen Systems Sätze bilden lassen, die zwar unbestreitbar wahr sind, aber aus den Axiomen eben dieses Systems nicht hergeleitet werden können, wie zum Beispiel Sätze des Inhalts: „Dieser Satz ist aus den Axiomen des Systems nicht herzuleiten.“ Das klingt nicht irgendwie bedrohlich, aber die andere auf Gödel basierende Aussage schon: Die Mathematiker werden nie wissen, ob ihre Disziplin widerspruchsfrei ist.

Das hat noch keinen Mathematiker dazu veranlaßt, seine Tätigkeit einzustellen, und es sollte daran erinnert werden, daß Gödel seine Ergebnisse selbstverständlich mit mathematischen Mitteln erreichte. Es gilt auch, daß zu jedem System  $S$ , in dem ein solcher wahrer, aber nicht herleitbarer Gödelsatz  $G$  gebildet werden kann, ein System  $S'$  vorhanden ist, das ihn ebenfalls enthält und diesmal auch herzuleiten imstande ist. Nur eben, daß  $S'$  dann wieder einen Gödelsatz  $G'$  enthält und ad infinitum.

Mathematikfremde Philosophen und Essayisten jener Jahre wiesen gleichwohl süf-



fisant auf Gödel hin, der angeblich dem formalen Denken seine Grenzen gewiesen habe. Hofstadter nun drehte, unter dem Beifall von uns Freunden des Formalen, den Spieß um: Mit sicherem Griff nahm er sich das Gödel'sche Beweisverfahren und begründete mit ihm eine Theorie der Künstlichen Intelligenz (KI). Das war nun wirklich eine Provokation, denn in den Achtziger Jahren trieb die Vorstellung, daß Maschinen intelligent sein könnten, das deutsche Feuilleton auf die Barrikaden.

Damit ist auch gesagt, daß eigentlich nicht das von Gödel Bewiesene das Thema dieses Buches ist, sondern dessen Methode der Beweisführung. Sie ist auf wundersame (und durch sorgfältige Lektüre von GEB für jeden Nichtmathematiker nachvollziehbare) Weise eine Anwendung von Regeln auf sich selbst, was ja auch Kompositionen von Bach und Bilder von Escher charakterisiert. Mit dieser Methode begründet Hofstadter seine Theorie, die zur „harten KI“ zählt: Mit symbolmanipulierenden Programmen will – sagen wir lieber: wollte – diese Denkrichtung den Maschinen Intelligenz verleihen. Die harte KI ist eine Untergruppe des sogenannten Funktionalismus. Ihm ist Intelligenz eine Leistung, wenn man so will ein Verhalten, und zwar „plattformunabhängig“, wie man heute wohl sagen würde: Egal, ob Gehirn oder Computer, Hauptsache es denkt. Auf welcher Hardware die Symbole verarbeitet würden, ist gleichgültig. Die Gegenposition nennt Hofstadter treffend den „Biochauvinismus“. Ihr zufolge ist Intelligenz eine Lebensfunktion, ohne Leben also keine Intelligenz, und Leben ist nach bisherigem Wissen proteingebunden.

In GEB versucht Hofstadter seine Theorie zu begründen, derzufolge Intelligenz und Bewußtsein gewissermaßen dadurch entstehen, daß Sätze auf sich selbst angewendet werden, was ich an dieser Stelle aufs äußerste verkürzt dargestellt habe. Das ist insofern old school KI, als daß nach Hofstadter die Symbolmanipulation das Geheimnis des Geistes enthält. Eine solche Position wird heute in der Wissenschaft kaum noch vertreten. Eine ihrer Schwächen besteht darin, nicht angeben zu können, was denn Intelligenz und Bewußtsein sind. Präzise ist sie, so lange sie selbstbezügliche Programme schreibt und anwendet, unpräzise wird sie stets an dem Punkt, an dem diese Symbolschieberei angeblich zum Geist wird. Das ist natürlich nur rückblickend geäußert, denn gerade solche Bücher wie GEB haben Veranlassung dazu gegeben, die Philosophie des Geistes zu modernisieren.

Sie geht heute beispielsweise der Frage nach, was denn das „phänomenale Selbst“ ist, also das, was sich im „Ich-Gefühl“ offenbart. Die Tatsache, daß wir die Welt aus einer Ich-Perspektive erfahren, ist uns zwar kognitiv verfügbar, aber auch wenn wir sie uns nicht bewußt machen, ist sie stets vorhanden (außer in pathologischen Fällen). Viele einschlägige Begriffe und deren Anwendungen sind philosophisch noch nicht aufgeklärt, und noch weniger sind es die neurologischen Vorgänge, auf denen Intelligenz und Bewußtsein beruhen – von Ausnahmen abgesehen. Aber damit haben wir bereits den Horizont von GEB verlassen.

Man kann Hofstadters Buch aus historisierender Sicht als das vorerst letzte große Feuerwerk der klassischen Künstlichen Intelligenz verstehen. Ein Jahr nach seinem Erscheinen in Deutschland wurde *Understanding Computers and Cognition* (1986) von Terry Winograd und Fernando Flores gedruckt, und es kursierten bereits die ersten rebellischen Papiere des Robotikers Rodney Brooks. So unterschiedlich die Her-

kunft der beiden Angriffe auf die klassische KI (Winograd und Flores ging es eigentlich um Bürocomputer, Brooks um bessere Ingenieurkunst), so verwandt waren doch die Grundlinien ihrer Kritik: Nicht die Symbolmanipulation macht das Wesen des Computers aus und damit einer eventuell möglichen Künstlichen Intelligenz, sondern die auf Ziele gerichtete Einbettung der Maschine in die Welt.

Der Umstand, daß Intelligenz und Bewußtsein historisch als Eigenschaften von Individuen entstanden sind, die sich mit ihren Körperfunktionen in eine Welt einpassen mußten – eine Welt, zu der auch andere Individuen zählen –, ist von der klassischen KI in den achtziger Jahren, in denen ja auch GEB erschien, seltsamerweise ignoriert worden. Und wenn sie von der Intelligenz eines Individuums und nicht bloß eines Programms sprach, dann hatte sie zumeist einen allgemeinen Akteur im Auge, also ein Subjekt mit sogenannter allgemeiner, nicht auf bestimmte Situationen spezialisierter Intelligenz.

Nun zeichnet den Menschen vor anderen Lebewesen gewiß die Fähigkeit aus, sich auf besonders effiziente Art und Weise neuen Gegebenheiten anzupassen – und diese Anpassungsfähigkeit kann als allgemeine Intelligenz gedeutet werden. Deren Verfeinerung geht so weit, daß unsereins abstrakte Symbole verarbeiten und beispielsweise Mathematik betreiben kann, aber der Kern unseres Geistes ist dies nicht. Die menschlichen Anpassungsleistungen werden überwiegend kollektiv erbracht, von bewußten und unbewußten Hirnvorgängen gemeinsam, vom inneren Signalssystem (Schmerz, Hungergefühl, Lust und so weiter), von unserer Körpermechanik, die uns das Laufen und Greifen und Sehen so vereinfacht und vielen anderen Elementen mehr. Auch die Sprache ist mitnichten auf ein System aus Symbolen und Regeln zu reduzieren. Unsere Sprechakte können Signalcharakter haben, eine emotionale Tönung setzen, sie mögen Sachverhalte beschreiben, im Befehlstone Handlungen in Gang setzen oder die ganze Unendlichkeit menschlicher Äußerungen aufrufen...

Mit anderen Worten: Das Pendel der rationalen Geistesphilosophie ist seit GEB wieder zurückgeschwungen. Nicht nur, daß Künstliche Neuronale Netze, in den achtziger Jahren unterschätzt, längst wieder rehabilitiert sind, nein, mittlerweile hat sich der Gedanke durchgesetzt, daß Künstliche Intelligenz (oder gar artifizielles Bewußtsein) ohne künstliche Körper und Sozialsysteme (seien sie auch nur im Rechner simuliert) nicht zu haben sein wird.

Es ist allerdings wohlfeil, nur auf das hinzuweisen, was sich seit Erscheinen dieses Buches alles getan hat – etwa in der Genetik, die unterdessen erfahren mußte, daß „genetischer Code“ eine unterkomplexe Metapher ist. Als Hofstadter darüber schrieb, war dies nun einmal die zeitgenössische Denkweise.

Interessanter ist vielmehr die Frage, was von GEB bleiben wird.

Die Computerkultur, wie sie von dem Buch geprägt wurde, erwies sich als kurzlebig; statt dessen entspann sich das Internet, und von „Computerkultur“ zu sprechen klingt mittlerweile altmodisch. Die harte, klassische KI ist bis auf weiteres gescheitert; gerade in Deutschland war es ihr gelungen, nach zähem Kampf gegen die Informatikbegründer, viel Geld für ihre Forschungen bewilligt zu bekommen, die beinahe alle im Sande verlaufen sind.

Gewiß, das Pendel wird irgendwann erneut zurückschwingen, vermutlich als Be-

gleiterscheinung sprunghaft steigender Rechenkapazitäten, und die Informatik wird GEB mit Staunen wiederlesen.

Aber die weiterreichende Wirkung des einen großen Meisterwerks von Douglas R. Hofstadter wird womöglich eine andere sein: Hier wurde erstmals seit Alexander von Humboldt der heroische Versuch unternommen, Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften (zu denen die Mathematik zu zählen ist, aber auch die Musiktheorie und selbstredend die Philosophie) gemeinsam auf Forschungsreise zu schicken. Und mehr noch, indem GEB die Musik und die Bildende Kunst anruft, literarisch ist und in seinen formalen Teilen leicht unter Zuhilfenahme von Bleistift und Papier nachzuvollziehen ist, gewinnt es eine Anschaulichkeit, für die es in der Darstellung wissenschaftlicher Themen wohl kaum ein anderes Beispiel in der Geschichte gibt.

Abgesehen von dem hohen Bildungs- und Unterhaltungswert von GEB verhält es sich daher möglicherweise so, daß dieses Buch eines Tages nicht mehr – wie heute – als Singularität anzusehen ist, sondern als das erste Exemplar einer neuen Gattung öffentlichen Philosophierens.

# Übersicht

## Teil I: GEB

**Einleitung: Ein musiko-logisches Opfer.** Das Buch beginnt mit der Geschichte von Bachs *Musikalischem Opfer*. Bach besuchte überraschend Friedrich den Großen und wurde gebeten, über ein vom König vorgelegtes Thema zu improvisieren. Seine Improvisationen bildeten die Grundlage dieses großen Werks. Das *Musikalische Opfer* und seine Geschichte bilden ein Thema, über das ich im ganzen Buch improvisiere und damit eine Art „Metamusikalisches Opfer“ schaffe. Ich bespreche Selbstbezüglichkeit und das Zusammenspiel verschiedener Ebenen bei Bach; das führt zu einer Erörterung paralleler Ideen in Eschers Zeichnungen und dann zu Gödels Satz. Als Hintergrund dafür gebe ich eine kurze Darstellung der Geschichte der Logik und der Paradoxien. Das bringt uns zum mechanischen folgerichtigen Denken, zum Computer und zur Debatte darüber, ob „Artifizielle Intelligenz“ (AI) möglich ist. Am Schluß erkläre ich, wie das Buch entstand – insbesondere meine Überlegungen zu den Dialogen.

*Dreistimmige Invention.* Bach schrieb fünfzehn dreistimmige Inventionen. In diesem dreistimmigen Dialog „erfindet“ Zeno die Schildkröte und Achilles – die wichtigsten fiktiven Protagonisten der Dialoge –, wie er das ja auch tatsächlich getan hat, um seine Paradoxien der Bewegung zu illustrieren. Ganz kurz, einfach als ein Vorgeschmack der nachfolgenden Dialoge gedacht.

**Kapitel I: Das MU-Rätsel.** Ein einfaches formales System (das MIU-System) wird vorgestellt; dem Leser wird dringend empfohlen, ein Rätsel zu lösen, um sich so mit formalen Systemen im allgemeinen vertraut zu machen. Verschiedene grundlegende Begriffe werden eingeführt: Zeichenkette, SATZ, Axiom, Folgerungsregel, Ableitung, formales System, Entscheidungsverfahren, Arbeiten innerhalb und außerhalb des Systems.

*Zweistimmige Invention.* Bach schrieb auch fünfzehn zweistimmige Inventionen. Diesen zweistimmigen Dialog habe nicht ich verfaßt, sondern Lewis Carroll im Jahre 1895. Carroll borgte sich Achilles und die Schildkröte von Zeno aus, und ich meinerseits borgte sie von Carroll. Zur Debatte stehen die Beziehungen zwischen folgerichtigem Denken, folgerichtigem Denken über folgerichtiges Denken, folgerichtigem Denken über folgerichtiges Denken über folgerichtiges Denken usw. In einem gewissen Sinn ist dies zu Zenos Paradoxien über die Unmöglichkeit der Bewegung parallel und zeigt anscheinend unter der Verwendung einer unendlichen Regression, daß folgerichtiges Denken unmöglich ist. Eine schöne Paradoxie. Wir werden in diesem Buch öfters darauf zurückkommen.

**Kapitel II: Bedeutung und Form in der Mathematik.** Ein neues formales System (das pg-System), sogar noch einfacher als das MIU-System aus Kapitel I, wird präsentiert. Zunächst anscheinend ohne Bedeutung, zeigt sich plötzlich, daß seine Symbole dank der Form der SÄTZE, in denen sie auftreten, doch eine Bedeutung besitzen. Diese Enthüllung ist die erste wichtige Einsicht in das Wesen der Bedeutung – nämlich eine tiefliegende Verbindung mit Isomorphie. Dann werden verschiedene, die Bedeutung betreffende Probleme besprochen, wie Wahrheit, Beweis, Symbolmanipulation und der schwer zu fassende Begriff „Form“.

*Sonate für Achilles solo.* Ein Dialog, der Bachs Sonaten für Violine solo imitiert. Achilles ist in diesem Fall der einzige Sprecher, weil es sich um eine Niederschrift nur einer Seite eines Telefongesprächs handelt; am anderen Ende der Leitung sitzt Herr Schildkröte. Ihre Unterhaltung dreht sich um die Begriffe „Figur“ und „Hintergrund“ in verschiedenen Zusammenhängen – z. B. Eschers Kunst. Der Dialog selbst ist ein Beispiel für diese Unterscheidung, da Achilles’ Stimme eine „Figur“ bildet und die von Herrn Schildkröte – implizit in der des Achilles – einen „Hintergrund“.

**Kapitel III: Figur und Hintergrund.** Der Unterschied zwischen Figur und Hintergrund wird mit dem zwischen SÄTZEN und Nicht-SÄTZEN in formalen Systemen verglichen. Die Frage: „Enthält eine Figur stets die gleiche Information wie der Hintergrund?“ führt zu der Unterscheidung zwischen rekursiv-aufzählbaren und rekursiven Mengen.

*Contrakrostipunktus.* Dieser Dialog ist grundlegend für das Buch, weil er eine Anzahl von Paraphrasen von Gödels selbstbezüglicher Konstruktion und seines Unvollständigkeitssatzes enthält. Eine der Paraphrasen besagt: „Für jeden Plattenspieler gibt es eine Schallplatte, die dieser nicht spielen kann.“ Die Überschrift ist eine Kreuzung zwischen dem Wort „akrostisch“ und dem ursprünglich lateinischen „Contrapunktus“, mit dem Bach jene vielen Fugen und Kanons kennzeichnete, aus denen die *Kunst der Fuge* sich zusammensetzt. Die *Kunst der Fuge* wird ausdrücklich erwähnt. Der Dialog selbst birgt einige akrostische Tricks.

**Kapitel IV: Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Geometrie.** Der vorhergehende Dialog wird erklärt, soweit es in diesem Stadium möglich ist. Das bringt uns zurück zur Frage, wie und wann Symbole in einem formalen System Bedeutung annehmen. Die Geschichte der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie wird als Illustration für den schwer zu fassenden Begriff „undefinierter Term“ dargestellt. Das führt zu Überlegungen über die Widerspruchsfreiheit verschiedener und möglicherweise „rivalisierender“ Geometrien. Die Diskussion klärt den Begriff des undefinierten Terms, und seine Beziehung zu Wahrnehmungs- und Denkprozessen wird erwogen.

*Kleines harmonisches Labyrinth.* Dieses beruht auf einem Bachschen Orgelstück, das den gleichen Titel trägt. Es ist eine spielerische Einführung in den Begriff der rekursiven, d. h. verschachtelten Strukturen und enthält Geschichten innerhalb

von Geschichten. Die Rahmengeschichte endet nicht, wie man erwarten würde, sondern bleibt offen; der Leser bleibt also im Ungewissen. Eine der geschachtelten Geschichten betrifft die Modulation in der Musik, besonders ein Stück für Orgel, das in der falschen Tonart endet, so daß der Hörer im Ungewissen bleibt.

**Kapitel V: Rekursive Strukturen und Prozesse.** Die Idee der Rekursion wird in vielen verschiedenen Zusammenhängen präsentiert: musikalische Muster, sprachliche Muster, geometrische Strukturen, mathematische Funktionen, physikalische Theorien, Computerprogramme und anderes.

*Kanon durch intervallische Augmentation.* Achilles und Herr Schildkröte versuchen, die Frage zu lösen: „Was enthält mehr Information – eine Platte oder das Grammophon, das sie spielt?“ Diese seltsame Frage ergibt sich daraus, daß Herr Schildkröte eine einzige Platte beschreibt, die, wenn man sie auf verschiedenen Grammophonen spielt, zwei ganz verschiedene Melodien erzeugt: B-A-C-H und C-A-G-E. Die beiden Melodien erweisen sich aber in einem sonderbaren Sinn als „gleich“.

**Kapitel VI: Wo die Bedeutung sitzt.** Eine umfassende Diskussion, wie Bedeutung zwischen verschlüsselter Botschaft, Entschlüssler und Empfänger aufgeteilt ist. Beispiele: DNS-Stränge, unentzifferte Inschriften auf antiken Tafeln und Schallplatten, die durchs All fliegen. Es wird eine Beziehung zwischen Intelligenz und „absoluter“ Bedeutung postuliert.

*Chromatische Phantasie und Fehde.* Ein Dialog, der abgesehen vom Titel kaum eine Ähnlichkeit mit Bachs *Chromatische Phantasie und Fuge* aufweist. Er handelt von der richtigen Art, Sätze so zu manipulieren, daß der Wahrheitsgehalt erhalten bleibt – und insbesondere von der Frage, ob es Regeln für den Gebrauch des Wortes „und“ gibt. Dieser Dialog hat viel mit dem von Lewis Carroll gemeinsam.

**Kapitel VII: Die Aussagenlogik.** Es wird vorgeschlagen, wie man Wörter wie „und“ mittels formaler Regeln in den Griff bekommen kann. Noch einmal tauchen die Ideen der Isomorphie und der automatischen Bedeutungsannahme von Symbolen in solch einem System auf. Alle Beispiele in diesem Kapitel sind übrigens „Zentzen“ – Sätzen aus Zen-Kōans. Dies geschieht mit Absicht und mit etwas hinterhältigem Lächeln, da Zen-Kōans absichtlich unlogische Geschichten sind.

*Krebs-Kanon.* Ein Dialog, der auf einer Komposition gleichen Titels aus dem *Musikalischen Opfer* beruht. Beide heißen so, weil Krebs angeblich rückwärts gehen. In diesem Dialog tritt Herr Krebs zum ersten Mal auf. Hinsichtlich der formalen Kunstgriffe und des Spiels mit verschiedenen Ebenen handelt es sich um den vielleicht dichtesten Dialog des Buches. Gödel, Escher und Bach sind in diesem ganz kurzen Dialog eng miteinander verwoben.

**Kapitel VIII: Theoria Numerorum Typographica.** Eine Erweiterung der Aussagenlogik namens „TNT“ wird präsentiert. In TNT kann zahlentheoretisches Schlußfolgern durch starre Symbolinterpretation bewerkstelligt werden. Unterschiede zwischen formalem Schlußfolgern und menschlichem Denken werden erörtert.

*Ein Mu-Opfer.* Der Dialog läßt verschiedene neue Themen in diesem Buch erkennen. Er scheint sich mit Zen-Buddhismus und Kōans zu befassen, ist aber in Wirklichkeit eine nur notdürftig verhüllte Diskussion über Wahrheit und Unwahrheit von Zeichenketten in der Zahlentheorie, über ihre Eigenschaft, SATZ oder Nicht-SATZ zu sein. Es finden sich flüchtige Hinweise auf die Molekularbiologie, besonders den genetischen Code. Außer im Titel und beim Spielen selbstbezüglicher Spiele besteht keine enge Affinität zum *Musikalischen Opfer*.

**Kapitel IX: Mumon und Gödel.** Ich versuche, über die seltsamen Vorstellungen des Zen-Buddhismus zu sprechen. Die Zentralgestalt ist der Mönch Mumon, der berühmte Kommentare zu vielen Kōans geschrieben hat. In einem gewissen Sinne haben die Zen-Vorstellungen eine metaphorische Ähnlichkeit zu gewissen zeitgenössischen Ideen in der Philosophie der Mathematik. Nach dieser „Zennerei“ wird Gödels grundlegende Idee der Gödelnummern eingeführt, und ich gebe eine erste Übersicht über Gödels Satz.

## Teil II: EGB

*Präludium und...* Dieser Dialog attachiert sich an den folgenden. Beide basieren auf Präludien und Fugen aus Bachs *Wohltemperiertem Klavier*. Achilles und Herr Schildkröte bringen dem Krebs ein Geschenk. Dieser hat gerade einen Gast, Herrn Dr. Ameisenbär. Das Geschenk entpuppt sich als eine Schallplattenaufnahme des *Wohltemperierten Klaviers*, sie wird unverzüglich aufgelegt. Während sie dem Präludium zuhören, diskutieren sie die Struktur von Präludien und Fugen, und das führt zu Achilles' Frage, wie man denn eine Fuge hören solle, als Ganzes oder als Summe ihrer Teile. Das ist die Debatte zwischen Holismus und Reduktionismus, die bald in der ... *emsigen Fuge* aufgenommen werden wird.

**Kapitel X: Beschreibungsebenen und Computersysteme.** Es werden verschiedene Ebenen besprochen, von denen aus man Bilder, Schachbretter und Computer betrachten kann. Die letzteren werden eingehend untersucht. Dabei müssen Maschinensprache, Assemblersprache, Compilersprachen, Betriebssysteme usw. beschrieben werden. Dann wenden wir uns zusammengesetzten Systemen anderer Art zu: Mannschaften im Sport, Atomkernen, Atomen, dem Wetter usw. Die Frage stellt sich, wie viele Zwischenstufen es gibt, ja ob es überhaupt welche gibt.

... *emsige Fuge.* Eine Nachahmung einer musikalischen Fuge: Jede Stimme fällt mit der gleichen Aussage ein. Das Thema – Holismus contra Reduktionismus – wird mit einem rekursiven Bild eingeführt, das aus Wörtern besteht, die aus kleineren Wörtern bestehen usw. Die Wörter, die auf den vier Stufen dieses seltsamen Bildes erscheinen, sind „HOLISMUS“, „REDUKTIONISMUS“ und „MU“. Das Gespräch wendet sich Dr. Ameisenbärs Freundin zu, nämlich Tante Colonia, einer vernunftbegabten Ameisenkolonie. Diskutiert werden die verschiedenen Ebenen ihrer Denkprozesse. In den Dialog sind zahlreiche fugale Tricks eingebaut. Ein Wink an

den Leser: parallele Tricks kommen auch in der Fuge auf der Platte vor, der die vier zuhören. Am Ende der ... *emsigen Fuge* stellen sich wieder, erheblich transformiert, Themen aus dem *Präludium* ein.

**Kapitel XI: Gehirn und Denken.** Das Thema dieses Kapitels lautet: „Wie können Gedanken durch die Hardware des Gehirns getragen werden?“ Es enthält zuerst einen Überblick über die Grobstruktur und die Feinstruktur des Gehirns. Dann wird der Zusammenhang zwischen Begriffen und der Aktivität der Neuronen einigermaßen eingehend erörtert.

*Englisch-französisch-deutsche Suite.* Ein Zwischenspiel, bestehend aus Lewis Carrolls Nonsense-Gedicht „Jabberwocky“ und zwei Übersetzungen, die eine ins Französische und die andere ins Deutsche, beide aus dem letzten Jahrhundert.

**Kapitel XII: Geist und Denken.** Das vorhergehende Gedicht wirft die zwingende Frage auf, ob Sprachen, ja sogar Hirne aufeinander abgebildet werden können. Wie ist Kommunikation zwischen zwei separaten physischen Gehirnen möglich? Was ist allen menschlichen Hirnen gemeinsam? Um einer Antwort näherzukommen, wird eine geographische Analogie vorgelegt. Die Frage stellt sich: „Kann ein Außenstehender in irgendeinem objektiven Sinn ein Gehirn verstehen?“

*Aria mit verschiedenen Veränderungen.* Ein Dialog, dessen Form auf Bachs Goldberg-Variationen beruht und dessen Inhalt mit zahlentheoretischen Problemen wie etwa Goldbachs Vermutung verwandt ist. Der Hauptzweck dieses Zwitter ist, zu zeigen, wie die Feinheiten der Zahlentheorie auf die Tatsache zurückzuführen sind, daß es viele verschiedene Variationen über das Thema des Durchsuchens eines unendlichen Raums gibt. Einige führen zu unendlichen Suchprozessen, andere zu endlichen, und wieder andere sind dazwischen in der Schwebel.

**Kapitel XIII: BlooP und FlooP und Gloop.** Dies sind die Namen von drei Computersprachen. BlooP-Programme können nur voraussagbar endliche Suchprozesse ausführen, während FlooP-Programme nicht voraussagbar endliche und sogar unendliche Suchprozesse ausführen können. Der Zweck dieses Kapitels ist die Veranschaulichung der Begriffe der primitiv rekursiven und allgemein rekursiven Funktionen in der Zahlentheorie, denn sie sind für Gödels Beweis unerlässlich.

*Die „Air“ in G.* Ein Dialog, in dem Gödels selbstbezügliche Konstruktion in Wörtern widerspiegelt ist. Der Gedanke geht auf W. v. O. Quine zurück. Der Dialog dient als Prototyp für das nächste Kapitel.

**Kapitel XIV: Über formal unentscheidbare Sätze von TNT und verwandten Systemen.** Der Titel dieses Kapitels ist eine Abwandlung der Überschrift von Gödels Aufsatz aus dem Jahr 1931, in dem der Unvollständigkeitssatz erstmals veröffentlicht wurde. Die beiden Teile von Gödels Beweis werden sorgfältig durchgegangen. Gezeigt wird, wie die Annahme, TNT sei widerspruchsfrei, den Schluß erzwingt, daß TNT (oder jedes ähnliche System) unvollständig ist. Beziehungen zur euklidischen und nichteuklidischen Geometrie werden besprochen. Implikationen für die Philosophie der Mathematik werden umsichtig erörtert.



*Geburtstagskantatata...* Achilles kann den schlaun und skeptischen Herrn Schildkröte nicht davon überzeugen, daß heute sein (Achilles') Geburtstag ist. Seine wiederholten, aber erfolglosen Versuche weisen auf die Wiederholbarkeit von Gödels Beweisführung hin.

**Kapitel XV: Aus dem System hinauspringen.** Gezeigt wird die Wiederholbarkeit von Gödels Beweisführung, wobei impliziert wird, daß TNT nicht nur unvollständig, sondern „seinem Wesen nach unvollständig“ ist. Das ziemlich berüchtigte Argument von J. R. Lucas, wonach Gödels Satz zeige, daß das menschliche Denken in keinem Sinne des Wortes „mechanisch“ sein könne, wird gewogen und für zu leicht befunden.

*Erbauliche Gedanken eines Tabakrauchers.* Ein Dialog, der viele Motive berührt, wobei der Akzent auf Selbstreproduktion und Selbstreferenz liegt. Fernsehkameras, die Fernsehschirme filmen, und Viren sowie andere subzelluläre Wesen, die sich selbst zusammensetzen, sind einige der verwendeten Beispiele. Der Titel stammt von einem Gedicht von J. S. Bach, das auf eigenartige Weise hier auftaucht.

**Kapitel XVI: Selbst-Ref und Selbst-Rep.** Das Kapitel handelt vom Zusammenhang zwischen Selbstbezüglichkeit in ihren verschiedenen Erscheinungsformen und selbstreproduzierenden Einheiten (z. B. Computerprogramme oder DNS-Moleküle). Diskutiert werden die Beziehungen zwischen einer selbstreproduzierenden Einheit und jenen ihr gegenüber externen Mechanismen, die die erste bei der Reproduktion ihrer selbst leiten – vor allem die Verschwommenheit dieser Unterscheidung. Das zentrale Thema dieses Kapitels ist, wie sich Information zwischen verschiedenen Ebenen solcher Systeme bewegt.

*Dd. Magnifikrebs.* Der Titel ist ein Wortspiel mit Bachs *Magnificat D-Dur*. Die Geschichte handelt von Herrn Krebs, der scheinbar die magische Begabung besitzt, zwischen wahren und falschen zahlentheoretischen Aussagen zu unterscheiden, indem er sie als musikalische Stücke liest, sie auf der Flöte spielt und feststellt, ob sie „schön“ sind oder nicht.

**Kapitel XVII: Church, Turing, Tarski und andere.** Der fiktive Krebs des vorhergehenden Dialogs wird durch verschiedene wirkliche Menschen mit erstaunlichen mathematischen Fähigkeiten ersetzt. Die Church-Turing-These, welche geistige Tätigkeit mit mechanischem Rechnen in Verbindung bringt, wird in verschiedenen Fassungen verschiedener Stärke präsentiert. Alle werden analysiert, besonders im Hinblick auf ihre Implikationen bezüglich des Problems, menschliches Denken mechanisch zu simulieren oder einer Maschine die Fähigkeit einzuprogrammieren, Schönheit zu empfinden oder zu schaffen. Die Verbindung zwischen Gehirntätigkeit und mechanischem Rechnen bringt einige andere Themen mit sich: das Halte-Problem von Turing und Tarskis Wahrheitssatz.

*SHRDLU bleibt meine Freude.* Dieser Dialog ist einem Aufsatz von Terry Winograd über sein SHRDLU-Programm entnommen; es wurden lediglich einige Namen geändert. In diesem Dialog kommuniziert ein Programm in recht eindrucksvoller

Umgangssprache mit einem Menschen über die sogenannte „Klötzchenwelt“. Das Computerprogramm scheint wirkliches Verständnis zu zeigen – in seiner begrenzten Welt. Der Titel des Dialogs beruht auf *Jesus bleibt meine Freude*, einem Satz von Bachs Kantate 147.

**Kapitel XVIII: Artificielle Intelligenz: Rückblicke.** Eröffnet wird dieses Kapitel mit einer Diskussion des berühmten „Turing-Tests“ – einem Vorschlag des berühmten Pioniers der Informatik, Alan Turing, für eine Methode, um das Vorhandensein oder das Nichtvorhandensein von „Denken“ in einer Maschine nachzuweisen. Von da gehen wir weiter zu einer gedrängten Geschichte der Artificiellen Intelligenz. Dazu gehören Programme, die – bis zu einem gewissen Grad – Spiele spielen, SÄTZE beweisen, Musik komponieren, mathematische Aufgaben lösen und natürliche Sprachen (z. B. Englisch) gebrauchen können.

*Contrafaktus.* Handelt davon, wie wir unbewußt unser Denken so organisieren, daß wir uns fortwährend hypothetische Varianten der wirklichen Welt vorstellen können. Und auch von abweichenden Varianten dieser Fähigkeit, wie sie ein neuer Mitspieler besitzt, Herr Ai, ein großer Liebhaber von Pommes frites und ein leidenschaftlicher Hasser von Contrafaktischem.

**Kapitel XIX: Artificielle Intelligenz: Aussichten.** Der vorhergehende Dialog löst eine Diskussion aus, wie Wissen in Schichten von Zusammenhängen repräsentiert wird. Das führt zu der modernen AI-Vorstellung der „Rahmen“. Eine rahmenähnliche Methode für die Manipulation einer Anzahl von visuellen Rätseln wird um der Anschaulichkeit willen vorgelegt. Dann wird die tiefgreifende Frage der Wechselwirkung von Begriffen im allgemeinen besprochen, und das führt zu einigen Spekulationen über Kreativität. Das Kapitel endet mit einer Anzahl persönlicher Fragen und Spekulationen über AI und den Geist im allgemeinen.

*Ai-Kanon.* Ein Kanon, der einen Kanon von Bach nachahmt und in dem eine Stimme die gleiche Melodie wie eine andere spielt, nur auf dem Kopf stehend und doppelt so langsam, während eine dritte Stimme frei ist. Hier spricht Herr Ai dieselben Sätze wie Herr Schildkröte – nur verneint (in großzügiger Bedeutung des Worts) und doppelt so langsam, während Achilles frei ist.

**Kapitel XX: Seltsame Schleifen oder Verwickelte Hierarchien.** Eine große Zusammenschau vieler der Ideen über hierarchische Systeme und Selbstbezüglichkeit. Handelt von dem Wirrwarr, der entsteht, wenn Systeme auf sich selber zurückgreifen, z. B. Wissenschaft, die Wissenschaft erforscht, eine Regierung, die die Übeltaten der Regierung prüft, Kunst, die den Regeln der Kunst Gewalt antut, und schließlich Menschen, die über ihr eigenes Gehirn und ihren Geist nachdenken. Hat Gödels Satz irgend etwas über diesen letzten „Wirrwarr“ zu sagen? Haben der freie Wille und das Bewußtsein mit Gödels Satz zu tun? Das Kapitel schließt damit, daß Gödel, Escher und Bach wieder zusammengebracht werden.

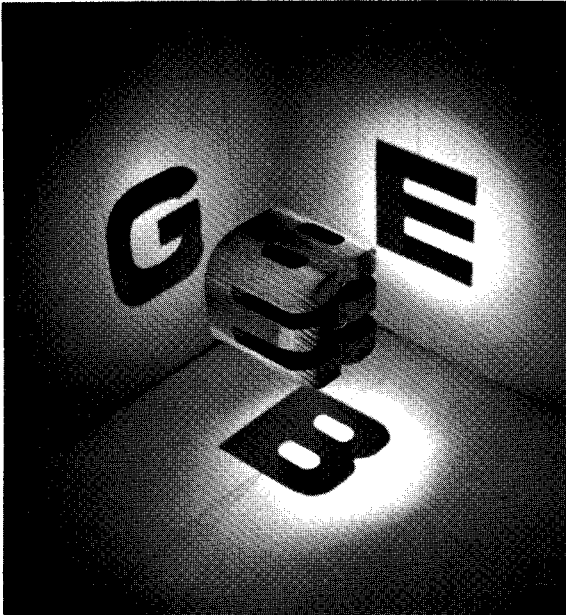
*Ricerca zu sechs Stimmen.* Dieser Dialog ist ein überbordendes Spiel mit vielen von den Ideen, welche dieses Buch durchdringen. Er ist eine Neuinszenierung der

Geschichte des *Musikalischen Opfers*, mit der das Buch begann; gleichzeitig ist er eine „Übersetzung“ in Worte des komplexesten Stücks im *Musikalischen Opfer*: des *Ricercar zu sechs Stimmen*. Diese Dualität gibt dem Dialog mehr Bedeutungsebenen als jedem anderen in diesem Buch. Friedrich der Große wird durch Herrn Krebs ersetzt, Klaviere durch Computer usw. Es gibt viele Überraschungen. Der Dialog handelt von Problemen des Geistes, Bewußtseins, freien Willens, Artifiziel-ler Intelligenz, des Turing-Tests usw., welche früher eingeführt worden sind. Er endet mit einem impliziten Hinweis auf den Anfang und macht aus dem Buch auf diese Weise eine große selbstbezügliche Schleife, die zugleich Bachs Musik, Eschers Zeichnungen und Gödels Satz symbolisiert.

:א ש ת נ ח : ש ת נ ח ז ח : א א א א : א א א א : א א א א א א  
 : ש ת נ ח ז ח א א א א : א א א א : א א א א : ש ת נ ח ז ח  
 : א א א א : ש ת נ ח ז ח : א א א א א א : א א א א א א א א  
 : א א א א א א : ש ת נ ח ז ח : א א א א א א : ש ת נ ח ז ח

*Der Anfang der Genesis, in altem Hebräisch.*

# TEIL I:



# Einleitung: Ein musiko-logisches Opfer

## *Autor:*

FRIEDRICH DER GROSSE, König von Preußen, kam 1740 an die Macht. Die Geschichtsbücher sprechen hauptsächlich von seiner militärischen Begabung, aber er nahm auch regen Anteil am Geistesleben seiner Zeit. Im Europa des 18. Jahrhunderts war sein Hof in Potsdam eines der großen geistigen Zentren. Der berühmte Mathematiker Leonhard Euler lebte dort fünfundzwanzig Jahre lang, und viele andere Mathematiker, Naturwissenschaftler und Philosophen kamen nach Potsdam – so Voltaire und Lamettrie –, die hier einige ihrer einflußreichsten Werke verfaßten.

Doch die eigentliche Liebe Friedrichs galt der Musik. Er war ein leidenschaftlicher Flötenspieler und Komponist. Noch heute werden einige seiner Stücke gelegentlich gespielt. Friedrich war einer der ersten Förderer der Künste, der die Vorzüge des vor kurzem aufgekommene „piano-forte“ („Leise-Laut“) erkannte. Das Piano war in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts als eine Weiterentwicklung des Cembalos entstanden. Das Problem des Cembalos war, daß man es nur mit ziemlich gleichmäßiger Lautstärke spielen konnte – es war nicht möglich, eine Note lauter als die andere anzuschlagen. Das „Leise-Laut“ löste, wie schon der Name sagt, dieses Problem. Von Italien aus, wo Bartolommeo Cristofori das erste „Leise-Laut“ gebaut hatte, fand es große Verbreitung. Gottfried Silbermann, der bedeutendste Orgelbauer seiner Zeit, bemühte sich, ein „vollkommenes“ Pianoforte zu bauen. Friedrich der Große war ohne Zweifel sein bedeutendster Förderer – es wird berichtet, daß er nicht weniger als fünfzehn Silbermann-Pianos besaß.

## Bach

Friedrich bewunderte nicht nur Klaviere, sondern auch einen Organisten und Komponisten namens J. S. Bach. Die Kompositionen dieses Bach waren einigermaßen berüchtigt. Die einen nannten sie „schwülstig und verworren“, die anderen sahen in ihnen unvergleichliche Meisterwerke. Niemand jedoch bestritt Bachs Fähigkeit, auf der Orgel zu improvisieren. Damals mußte ein Organist nicht nur vom Blatt spielen, sondern auch extemporieren können, und Bach war für seine außergewöhnliche Kunst der Improvisation berühmt. (Einige köstliche Anekdoten darüber finden sich in H. T. David und A. Mendel, *The Bach Reader*.)

Im Jahre 1747 war Bach zweiundsechzig Jahre alt und sein Ruhm wie auch einer seiner Söhne, waren bis nach Potsdam gedungen; Carl Philipp Emanuel Bach war Kapellmeister an Friedrichs Hof. Seit Jahren hatte der König durch zarte Winke Philipp Emanuel zu verstehen gegeben, wie sehr es ihn freuen würde, wenn der alte Bach ihn

besuchte; doch dieser Wunsch war nie in Erfüllung gegangen. Friedrich war besonders daran gelegen, daß Bach seine neuen Silbermann-Klaviere ausprobierte, die, wie Friedrich richtig voraussah, die große Neuentwicklung in der Musik darstellten.

Friedrich pflegte an seinem Hof Abendkonzerte mit Kammermusik zu veranstalten, wobei er den Flöten-Solopart oft selbst übernahm. Wir geben hier ein Gemälde Adolph von Menzels wieder, der im 19. Jahrhundert eine Reihe von Gemälden aus dem Leben Friedrichs schuf. Am Cembalo sitzt C. P. E. Bach, und die Figur ganz rechts ist Joachim Quantz, des Königs Flötenlehrer, der einzige, der das Spiel des Königs tadeln durfte. An einem Mai-Abend des Jahres 1747 stellte sich ein unerwarteter Gast ein. Johann Nikolaus Forkel, einer der frühesten Biographen Bachs, berichtet das folgende:

Eines Abends wurde ihm, als er eben seine Flöte zurecht machte, und seine Musiker schon versammelt waren, durch einen Offizier der geschriebene Rapport von angekommenen Fremden gebracht. Mit der Flöte in der Hand übersah er das Papier, drehte sich aber sogleich gegen die versammelten Capellisten und sagte mit einer Art von Unruhe: Meine Herren, der alte Bach ist gekommen! Die Flöte wurde hierauf weggelegt, und der alte Bach, der in der Wohnung seines Sohnes abgetreten war, sogleich auf das Schloß beordert. Wilh. Friedemann, der seinen Vater begleitete, hat mir diese Geschichte erzählt, und ich muß sagen, daß ich noch heute mit Vergnügen an die Art denke, wie er sie mir erzählt hat. Es wurden in jener Zeit noch etwas weitläufige Complimente gemacht. Die erste Erscheinung Joh. Seb. Bachs vor einem so großen Könige, der ihm nicht einmahl Zeit ließ, sein Reisekleid mit einem schwarzen Cantor-Rock zu verwechseln, mußte also nothwendig mit vielen Entschuldigungen verknüpft seyn. Ich will die Art dieser Entschuldigungen hier nicht anführen, sondern bloß bemerken, daß sie in Wilh. Friedemanns Munde ein förmlicher Dialog zwischen dem König und dem Entschuldiger waren.

Aber was wichtiger als dieß alles ist, der König gab für diesen Abend sein Flötenkonzert auf, nöthigte aber den damahls schon sogenannten alten Bach, seine in mehrern Zimmern des Schlosses herumstehende Silbermannische Fortepiano zu probiren. [Hier fügt Forkel die folgende Fußnote ein: „Die Pianoforte's des Freyberger Silbermann gefielen dem König so sehr, daß er sich vornahm, sie alle aufkaufen zu lassen. Er brachte ihrer 15 zusammen. Jetzt sollen sie alle als unbrauchbar in verschiedenen Winkeln des Königl. Schlosses umher stehen.“] Die Capellisten gingen von Zimmer zu Zimmer mit, und Bach mußte überall probiren und fantasiren. Nachdem er einige Zeit probirt und fantasirt hatte, bat er sich vom König ein Fugenthema aus, um es sogleich ohne alle Vorbereitung auszuführen. Der König bewunderte die gelehrte Art, mit welcher sein Thema so aus dem Stegreif durchgeführt wurde, und äußerte nun, vermuthlich um zu sehen, wie weit eine solche Kunst getrieben werden könne, den Wunsch, auch eine Fuge mit 6 obligaten Stimmen zu hören. Weil aber nicht jedes Thema zu einer solchen Vollstimmigkeit geeignet ist, so wählte sich Bach selbst eines dazu, und führte es sogleich zur größten Verwunderung aller Anwesenden auf eine eben so prachtvolle und gelehrte Art aus, wie er vorher mit dem Thema des Königs gethan hatte. Auch seine Orgelkunst wollte der König kennen lernen. Bach wurde daher an den folgenden Tagen

von ihm eben so zu allen in Potsdam befindlichen Orgeln geführt, wie er vorher zu allen Silbermannischen Fortepianos geführt worden war. Nach seiner Zurückkunft nach Leipzig arbeitete er das vom König erhaltene Thema 3 und östimmig aus, fügte verschiedene kanonische Kunststücke darüber hinzu, ließ es unter dem Titel: „Musikalisches Opfer“, in Kupfer stechen, und dedicirte es dem Erfinder desselben.<sup>1</sup>



Abb. 3. Das Königliche Thema.

Als Bach dem König ein Exemplar des *Musikalischen Opfers* schickte, fügte er einen Begleitbrief bei, der, wenn wegen nichts anderem, seines Stils wegen von Interesse ist – ziemlich unterwürfig und schmeichlerisch. In unseren Ohren klingt er eher komisch. Vielleicht läßt er auch etwas wie eine Entschuldigung Bachs für sein Aussehen durchscheinen<sup>2</sup>:

Allergnädigster König,

Ew. Majestät weyhe hiermit in tiefster Unterthänigkeit ein Musicalisches Opfer, dessen edelster Theil von Deroselben hoher Hand selbst herrühret. Mit einem ehrfurchtsvollen Vergnügen erinnere ich mich annoch der ganz besondern Königlichen Gnade, da vor einiger Zeit, bey meiner Anwesenheit in Potsdam, Ew. Majestät selbst, ein Thema zu einer Fuge auf dem Clavier mir vorzuspielen geruheten, und zugleich allergnädigst auferlegten, solches alsbald in Deroselben höchsten Gegenwart auszuführen. Ew. Majestät Befehl zu gehorsamen, war meine unterthänigste Schuldigkeit. Ich bemerkte aber gar bald, daß wegen Mangels nöthiger Vorbereitung, die Ausführung nicht also gerathen wollte, als es ein so treffliches Thema erforderte. Ich fassete demnach den Entschluß, und machte mich sogleich anheischig, dieses recht Königliche Thema vollkommener auszuarbeiten, und sodann der Welt bekannt zu machen. Dieser Vorsatz ist nunmehr nach Vermögen bewerkstelliget worden, und er hat keine andere als nur diese untadelhafte Absicht, den Ruhm eines Monarchen, ob gleich nur in einem kleinen Punkte, zu verherrlichen, dessen Größe und Stärke, gleich wie in allen Kriegs- und Friedens-Wissenschaften, also auch besonders in der Musik, jedermann bewundern und verehren muß. Ich erkühne mich dieses unterthänigste Bitten hinzuzufügen:

Ew. Majestät geruhen gegenwärtige wenige Arbeit mit einer gnädigen Aufnahme zu würdigen, und Deroselben allerhöchste Königliche Gnade noch fernerweit zu gönnen

*Ew. Majestät*

*Leipzig den 7. Julii 1747.*

*allerunterthänigst gehorsamstem Knechte,  
dem Verfasser.*

Etwa siebenundzwanzig Jahre später, d. h. vierundzwanzig Jahre nach Bachs Tod, führte der Baron Gottfried van Swieten – dem übrigens Forkel seine Bach-Biographie gewidmet hatte, und dem Beethoven seine Erste Symphonie widmete – ein Gespräch mit König Friedrich, über das er wie folgt berichtet:

Er [Friedrich] sprach mit mir auch unter anderen Dingen über Musik und über einen großen Orgelspieler namens Bach, der eine zeitlang in Berlin gewilt hatte. Dieser Künstler [Wilhelm Friedemann Bach] besitzt ein außerordentliches Talent, eine tiefgreifende Kenntnis der Harmonik und eine Kraft in der Ausführung, wie ich sie nie gehört oder mir vorgestellt hatte, während diejenigen, die seinen Vater kannten, sagen, daß er sogar noch bedeutender sei. Der König teilt diese Meinung, und um es mir zu beweisen, sang er laut ein chromatisches Fugenthema, welches er jenem alten Bach gegeben hatte; und dieser hatte auf der Stelle daraus eine Fuge mit vier Stimmen, dann mit fünf Stimmen und schließlich mit acht Stimmen gemacht.<sup>3</sup>

Natürlich können wir nicht mehr feststellen, ob es Friedrich der Große oder Baron van Swieten war, der dieser Begebenheit überlebensgroße Dimensionen verlieh. Doch zeigt das Gespräch, wie stark die Bach-Legende unterdessen geworden war. Um einen Begriff davon zu geben, wie außerordentlich eine sechsstimmige Fuge ist: im gesamten *Wohltemperierten Klavier* von Bach, das achtundvierzig Präludien und Fugen enthält, sind nur zwei fünfstimmig, keine jedoch sechsstimmig! Die Improvisation einer sechsstimmigen Fuge ist vielleicht mit dem Spielen – und Gewinnen – von sechzig simultan blind gespielten Schachpartien zu vergleichen. Eine achtstimmige Fuge zu improvisieren übersteigt die menschlichen Fähigkeiten.

Auf dem Vorsatzblatt des Exemplars, das Bach an Friedrich sandte, stand die folgende Inschrift:

*Regis Iusfu Cantio Et Reliqua Canonica Arte Resolula.*

*Abb. 4.*

(„Auf Geheiß des Königs, die Melodie und der Rest durch kanonische Kunst aufgelöst.“) Hier spielt Bach mit dem Wort „kanonisch“, das nicht nur „mit Kanons“, sondern auch „auf die bestmögliche Art und Weise“ bedeutet. Die Anfangsbuchstaben der Widmung ergeben

RICERCAR



– ein italienisches Wort, das „suchen“ bedeutet. Tatsächlich gibt es im *Musikalischen Opfer* viel zu suchen. Es besteht aus einer dreistimmigen Fuge, einer sechsstimmigen Fuge, zehn Kanons und einer Triosonate. Musikforscher sind zum Schluß gekommen, daß die dreistimmige Fuge im wesentlichen mit der identisch sein muß, die Bach für Friedrich den Großen improvisierte. Die sechsstimmige Fuge ist eine der komplexesten Schöpfungen Bachs, und das Thema ist natürlich das Königliche Thema. Dieses Thema (siehe Abb. 3) ist äußerst komplex, rhythmisch unregelmäßig und äußerst chromatisch (d. h. es ist mit zahlreichen Halbtonschritten durchsetzt, die nicht zu der Tonart gehören, in der es verfaßt ist). Eine darauf basierende annehmbare Fuge auch nur für zwei Stimmen zu schreiben, wäre für einen durchschnittlichen Komponisten keineswegs eine leichte Aufgabe.

Beide Fugen sind mit „Riccercar“ und nicht mit „Fuga“ überschrieben. Dies ist eine andere Bedeutung des Wortes; „Riccercar“ war der ursprüngliche Name der heute „Fuge“ genannten musikalischen Form. Zu Bachs Zeiten war das Wort „Fuge“ (oder, lateinisch und italienisch, *fuga*) allgemein üblich, aber der Ausdruck „Riccercar“ blieb bestehen und bezeichnete jetzt eine gehobene Form der Fuge, für das Ohr des Durchschnittsmenschen vielleicht von zu großer intellektueller Strenge. In ähnlicher Weise bedeutet das Wort „recherché“ eigentlich „erlesen“, hat aber (im Englischen) Ober- töne derselben Art, nämlich des Esoterischen und des intellektuellen Raffinements.

Die Triosonate bietet eine willkommene Erholung von der Strenge der Fuge und des Kanons; sie ist sehr melodisch und lieblich, beinahe ein Tanz. Aber auch sie basiert weitgehend auf dem Königlichen Thema, so chromatisch und streng dieses auch sein mag. Es grenzt ans Wunderbare, daß Bach solch ein Thema für ein gefälliges Zwischenspiel verwenden konnte.

Die zehn Kanons im *Musikalischen Opfer* gehören zu den ingeniösesten Kanons, die Bach jemals komponiert hat. Indessen hat Bach sie aber merkwürdigerweise nie völlig ausgeführt, und zwar absichtlich. Sie wurden König Friedrich als Rätsel dargeboten. Es war damals ein beliebtes musikalisches Spiel, ein einzelnes Thema zusammen mit mehr oder weniger kniffligen Winkeln vorzulegen, und den auf dem Thema basierenden Kanon von jemand anders „entdecken“ zu lassen. Um zu verstehen, wie so etwas möglich ist, muß man etwas über Kanons wissen.

## Kanon und Fuge

Das Grundprinzip des Kanons besteht darin, daß man ein einziges Thema gegen dieses selbst spielt. Das geschieht in der Weise, daß die verschiedenen mitwirkenden Stimmen „Kopien“ des Themas spielen. Das kann man jedoch auf viele verschiedene Arten tun. Der einfachste Kanon ist der Rundgesang, wie zum Beispiel *Bruder Jakob* oder *Wachet auf ...* usw. Hier erklingt das Thema in der ersten Stimme und nach einem bestimmten Intervall eine „Kopie“ davon in genau der gleichen Tonart. Nach dem gleichen Intervall fällt die dritte Stimme mit demselben Thema ein, usw. Die meisten Themen harmonisieren nicht auf diese Weise mit sich selbst. Damit ein Thema in einem Kanon verwendet werden kann, muß jede seiner Noten in doppelter (oder drei-

oder vierfacher) Weise verwertet werden können: sie muß zunächst einen Teil der Melodie bilden, und sodann muß sie ein Teil der Harmonisierung dieser Melodie werden. Bei drei kanonischen Stimmen z. B. fungiert jede Note des Themas harmonisch auf zwei verschiedene Arten, und außerdem noch melodisch. So hat also jede Note in einem Kanon mehr als eine musikalische Bedeutung; das Ohr des Zuhörers und sein Gehirn finden die richtige Bedeutung automatisch, indem sie den Zusammenhang berücksichtigen.

Es gibt natürlich noch kompliziertere Arten des Kanons. Die erste Steigerung der Komplexität besteht darin, daß die „Kopien“ des Themas nicht nur *zeitlich*, sondern auch in der *Tonhöhe* verschoben werden. So singt etwa die erste Stimme ein Thema, das mit C beginnt, und die zweite Stimme, die sich mit der ersten überschneidet, singt dasselbe Thema, setzt aber auf der Oberquinte, bei G, ein. Eine dritte Stimme, noch einmal eine Quinte höher – bei D – könnte sich mit den ersten beiden überschneiden usw. Die nächste Komplexitätsstufe ist die, daß das *Tempo* der verschiedenen Stimmen nicht dasselbe ist. So kann etwa die zweite Stimme doppelt so schnell oder halb so schnell wie die erste singen. Das erste nennt man *Diminution (Verkleinerung)*, das zweite *Augmentation (Vergrößerung)* (da das Thema zu schrumpfen, bzw. sich auszu dehnen scheint).

Wir sind aber noch nicht am Ende! Die nächste Komplexitätsstufe in der Konstruktion eines Kanons ist die Umkehrung des Themas, was bedeutet, eine Melodie herzustellen, die *nach unten* geht, wo immer das ursprüngliche Thema nach *oben* geht, und zwar um genau gleich viele Halbtöne. Das ist eine recht sonderbare Transformation, aber wer viele solche Umkehrungen gehört hat, findet sie allmählich ganz natürlich. Bach liebte die Umkehrungen besonders; sie finden sich häufig in seinen Werken, auch im *Musikalischen Opfer*. (Ein einfaches Beispiel einer Umkehrung ist *Good King Wenceslas* [vgl. Abb. 4a]. Singt man das Original und seine Umkehrung zusammen, und zwar mit einer Oktave Abstand und einer Verschiebung um zwei Schläge, ergibt sich ein hübscher Kanon.) Die schwierigste „Kopie“ ist die rückläufige, in der das Thema von hinten nach vorn gespielt wird. Ein Kanon, der sich dieses Kunstgriffs bedient, heißt *Krebskanon*, weil er an die besondere Art der Fortbewegung des Krebses erinnert. Bach nahm ins *Musikalische Opfer*, wie nicht anders zu erwarten, einen Krebskanon auf. Man beachte, daß jede Art der „Kopie“ alle im ursprünglichen Thema enthaltene Information in dem Sinne bewahrt, daß das Thema von jeder beliebigen Kopie aus rekonstruiert werden kann. Eine solche informationsbewahrende Transformation nennt man oft *Isomorphie*, und wir werden in diesem Buch häufig mit Isomorphien zu tun haben.

Manchmal ist es wünschenswert, die Strenge der kanonischen Form etwas zu lockern, etwa indem man geringfügige Abweichungen von einer genauen Kopie um einer flüssigeren Harmonie willen zuläßt. Es gibt auch Kanons mit „freien“ Stimmen, also solche, die vom Thema des Kanons keinen Gebrauch machen, sondern die einfach auf angenehme Weise mit den Stimmen, die miteinander den Kanon bilden, harmonieren.

Jeder der Kanons im *Musikalischen Opfer* beruht auf einer anderen Variation des Königlichen Themas, und von allen soeben beschriebenen Mitteln, Kanons zu komplizieren, hat Bach erschöpfend Gebrauch gemacht und sie sogar gelegentlich kombi-

# GOOD KING WENCESLAS

The first system of the musical score consists of two staves. The upper staff is in treble clef and the lower staff is in bass clef. The music is written in a simple, folk-like style with a key signature of one flat (B-flat). The melody is primarily composed of quarter and eighth notes, with some rests. The bass line provides a simple harmonic accompaniment.

The second system of the musical score continues the piece. It features the same two-staff format (treble and bass clefs). The melody continues with similar rhythmic patterns, including some sixteenth-note passages. The bass line remains consistent with the first system.

\*Canon by inversion. SEK

Abb. 4a. Good King Wenceslas. Canon durch Umkehrung von Scott E. Kim.

niert. So nennt er einen dreistimmigen Kanon „Canon per Augmentationem, contrario Motu“, die mittlere Stimme ist frei (sie singt das Königliche Thema), während die beiden anderen kanonisch mittels Augmentation und Umkehrung über und unter ihr tanzen. Ein anderer trägt einfach die kryptische Bezeichnung „Quaerendo inveniatis“ („Suchet, so werdet ihr finden“). Alle Kanonrätsel sind gelöst worden. Johann Philipp Kirnberger, ein Schüler Bachs, hat die Lösungen angegeben. Man fragt sich aber dennoch, ob es nicht noch andere zu entdecken gibt!

Ich muß auch noch kurz erklären, was eine Fuge ist. Sie ist dem Kanon ähnlich, indem sie gewöhnlich auf einem Thema basiert, das von verschiedenen Stimmen und in verschiedenen Tonarten, gelegentlich auch in verschiedenen Tempi oder umgekehrt oder rückwärts gespielt wird. Doch die Fuge ist weit weniger starr als der Kanon, und infolgedessen bietet sie mehr Spielraum für emotionalen und künstlerischen Ausdruck. Eine Fuge läßt sich an ihrem Anfang erkennen: eine einzelne Stimme, die das Thema singt. Danach fällt eine zweite Stimme ein, entweder auf der Oberquinte oder auf der Unterquarte. Unterdessen geht die erste Stimme weiter und singt das „Gegenthema“: ein Nebenthema, das so gewählt ist, daß es rhythmische, harmonische und melodische Kontraste zum Hauptthema bildet. Jede Stimme fällt im Turnus ein und wird häufig vom Gegenthema in einer anderen Stimme begleitet, während die übrigen Stimmen das tun, was dem Komponisten an phantasievollen Dingen eben einfällt. Wenn alle Stimmen „angekommen“ sind, gibt es keine Regeln mehr. Zwar gibt es gewisse festliegende Dinge, die getan werden können, sie liegen aber doch nicht so fest, daß man eine Fuge einfach nach einer Formel komponieren könnte. Die zwei Fugen im *Musikalischen Opfer* sind hervorragende Beispiele von Fugen, die niemals nach einer Formel hätten komponiert werden können. In ihnen steckt weit mehr als bloße Fugalität.

Alles in allem stellt das *Musikalische Opfer* eine von Bachs höchsten Leistungen auf dem Gebiet des Kontrapunkts dar. Es ist an sich eine große intellektuelle Fuge, in der viele Einfälle und Formen miteinander verwoben und spielerische Doppelbedeutungen sowie subtile Anspielungen überaus häufig sind. Und es ist eine wundervolle Schöpfung des menschlichen Geistes, an der wir uns immer wieder erfreuen können. (Das ganze Werk hat H. T. David in seinem Buch *J. S. Bach's Musical Offering* sehr schön beschrieben.)

## Ein Endlos Reduplizierter Canon

Von den Kanons im *Musikalischen Opfer* ist einer ganz besonders ungewöhnlich. Er ist einfach mit „Canon per Tonos“ überschrieben und dreistimmig. Die oberste Stimme singt eine Variation des Königlichen Themas, während unter ihr zwei Stimmen eine kanonische Harmonisierung ergeben, die auf einem zweiten Thema basieren. Die untere dieser beiden Stimmen singt ihr Thema in c-Moll (der Tonart des ganzen Kanons), und die obere Stimme dieses Paares singt das gleiche Thema, in der Tonhöhe um ein Intervall einer Quinte nach oben verschoben. Was diesen Kanon jedoch von allen andern unterscheidet, ist, daß er, wenn er zu Ende ist – oder vielmehr zu Ende zu sein *scheint* – nicht mehr in der Tonart c-Moll, sondern nunmehr in d-Moll ist.

Irgendwie hat Bach es fertiggebracht, vor den Augen des Hörers zu *modulieren*, d. h. von einer Tonart zur andern überzuwechseln. Und der Kanon ist so konstruiert, daß dieses „Ende“ sich reibungslos wieder an den Anfang anschließt; so kann man also den Prozeß wiederholen und nach E-Dur gelangen, um wiederum an den Anfang anzuknüpfen. Sukzessive Modulationen führen das Ohr in immer weiter entfernte Gebiete der Tonalität, so daß man nach einigen Modulationen erwarten würde, sich hoffnungslos weit von der Ausgangstonart entfernt zu befinden. Und doch ist, wie durch Magie, nach genau sechs solchen Modulationen die ursprüngliche Tonart von c-Moll wieder erreicht! Alle Stimmen sind genau eine Oktave höher, als sie zu Beginn waren, und an diesem Punkt kann das Stück auf musikalisch sinnvolle Weise abgebrochen werden. Wie man sich vorstellen kann, war das Bachs Absicht, aber er fand ohne Zweifel auch an der Implikation Gefallen, daß sich dieser Prozeß ad infinitum fortsetzen läßt, und vielleicht hat er deshalb an den Rand geschrieben: „Wie die Modulation steigt, so möge es auch der Ruhm des Königs tun.“ Um zu betonen, daß dieser Kanon in die Unendlichkeit verweist, nenne ich ihn den „Endlos Reduplizierten Canon“.

Mit diesem Kanon gibt uns Bach unser erstes Beispiel einer *Seltsamen Schleife*. Dieses Phänomen tritt immer dann ein, wenn wir uns durch die Stufen eines hierarchischen Systems nach oben (oder nach unten) bewegen und uns dann unerwartet wieder genau an unserem Ausgangspunkt befinden. (Im vorliegenden Fall ist das System das der Tonarten in der Musik.) Manchmal gebrauche ich den Ausdruck *Verwickelte Hierarchie* zur Beschreibung eines Systems, in dem eine Seltsame Schleife vorkommt. Im Verlauf unserer Betrachtungen wird das Thema der Seltsamen Schleife immer wieder auftauchen. Mitunter wird es verborgen sein, mitunter offen zutage liegen; mitunter wird es aufrecht, dann wieder auf dem Kopf stehen oder rückläufig sein. Mein Rat an den Leser lautet: „Quaerendo inveniatis.“

## Escher

Meiner Ansicht nach hat niemand den Begriff der Seltsamen Schleife visuell schöner und überzeugender dargestellt als der holländische Künstler M. C. Escher, der von 1898 bis 1972 gelebt hat. Escher hat einige der geistig anregendsten Bilder aller Zeiten geschaffen. Manche von ihnen haben ihren Ursprung im Paradoxen, der optischen Täuschung oder der Doppeldeutigkeit. Zu den ersten Bewunderern von Eschers Bildern gehörten Mathematiker, und das ist nicht verwunderlich, da die Werke oft auf mathematischen Prinzipien der Symmetrie oder der regelmäßigen Flächenaufteilung beruhen ... Ein typisches Bild von Escher jedoch enthält weit mehr als nur Symmetrien oder regelmäßige Flächenaufteilungen; oft liegt ihnen eine Idee zugrunde, die dann künstlerisch verarbeitet wird. Und insbesondere die Seltsame Schleife ist eins der am häufigsten wiederkehrenden Motive. Man werfe zum Beispiel einen Blick auf die Lithographie *Wasserfall* (Abb. 5), und vergleiche die in sechs Stufen endlos fallende Schleife mit der in sechs Stufen endlos ansteigenden Schleife des „Canon per Tonos“. Die Ähnlichkeit in der Auffassung ist bemerkenswert. Bach und Escher spielen ein einziges Thema in zwei verschiedenen „Tonarten“ durch: Musik und bildende Kunst.