

**LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL IV/I**

## **W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik**

### **Teil I**

unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 449 Seiten, 190 Abb., brosch., ISBN 978-3-8085-5574-3, Europa-Nr. 55743

Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

### **Teil II**

unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990, 618 Seiten, 136 Abb., brosch., ISBN 978-3-8085-5576-7, Europa-Nr. 55767

Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache Integrale und Kurvenintegrale – Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

### **Teil III/1**

12. Aufl. 1991, 283 Seiten, 3 Abb., geb., ISBN 978-3-8085-5578-1, Europa-Nr. 55781

Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

### **Teil III/2**

unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 599 Seiten, 85 Abb., geb., ISBN 978-3-8085-5580-4, Europa-Nr. 55804

Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

### **Teil IV/1**

unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 300 Seiten, 4 Abb., geb., ISBN 978-3-8085-5582-8, Europa-Nr. 55828

Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume. Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

### **Teil IV/2**

unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 469 Seiten, 16 Abb., geb., ISBN 978-3-8085-5584-2, Europa-Nr. 55842

Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

### **Teil V**

unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991, 545 Seiten, 3 Abb., brosch., ISBN 978-3-8085-5586-6, Europa-Nr. 55866

Das Stieltjessche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

ISBN 978-3-8085-5572-9, Europa-Nr. 55729



Edition  
Harri   
Deutsch 

# LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

TEIL IV/I

VON

**W. I. SMIRNOW**

6. Auflage 1988

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 55828**

Titel der Originalausgabe

В. И. Смирнов, Курс высшей математики  
Том четвертый, Часть первая  
Издание шестое  
Наука, Москва 1974

Die Ausgabe in deutscher Sprache (nach der 3. russischen Auflage) besorgten:  
Christa Berg und Lothar Berg (Übersetzer),  
Herbert Beckert, Günter Schmidt, Hans Schubert (Wissenschaftliche Redaktion).  
Die Übersetzung der Änderungen und Ergänzungen nach der 6. russischen Auflage  
besorgte Werner Plischke (Wissenschaftliche Redaktion: Lothar Berg).

Unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988  
Druck 5 4 3

**ISBN 978-3-8085-5582-8**

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung  
außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG,  
42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald  
Druck: Totem, 88-100 Inowroclaw, Polen

# Vorwort zur sechsten russischen Auflage

Die vorliegende sechste Auflage von Teil IV unterscheidet sich wesentlich von der fünften Auflage. Das hängt damit zusammen, daß dieser Teil erstmals nach dem veränderten Teil II erscheint, in dem die Theorie des Lebesgueschen Integrals dargestellt und die Klasse  $L_2$  der im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbaren Funktionen eingeführt wurde. Dies rief größere Veränderungen in der Darstellung des ersten Kapitels hervor, das die Theorie der Integralgleichungen enthält. Außerdem wurde ein drittes Kapitel eingefügt, in dem neue Ansatzpunkte für einige Grundbegriffe der mathematischen Analysis aufgezeigt werden. Das zweite Kapitel, das die Variationsrechnung beinhaltet, wurde etwas erweitert. Im dritten Kapitel wird unter neuen Gesichtspunkten ein Minimalproblem für ein quadratisches Funktional betrachtet.

In der letzten Auflage umfaßte Teil IV mehr als 800 Seiten. In dieser Auflage wurde es erforderlich, ihn in zwei Teilbände zu zerlegen; das vorliegende Buch ist der erste Teilband.<sup>1)</sup>

Schließlich möchte ich noch meinen tiefempfundenen Dank gegenüber meinen Mitarbeitern an der Universität M. S. BIRMAN, O. A. LADYSHENSKAJA, M. S. SOLOM-JAK und N. N. URALZEWA für die große Hilfe bei der Erarbeitung dieses Buches zum Ausdruck bringen.

W. I. SMIRNOW

---

<sup>1)</sup> In der deutschen Ausgabe der Teile IV/1 und IV/2 beziehen sich ebenfalls alle Rückverweise auf den veränderten Teil II, der in deutscher Übersetzung erstmals im Jahre 1972 (11. Auflage) erschien. Rückverweise auf Teil III/2 beziehen sich gleichfalls auf eine veränderte russische Ausgabe; diese Änderungen werden bei der 14. Auflage der deutschen Ausgabe dieses Teils berücksichtigt. (Anm. d. Red.)



# Inhalt

## I. Integralgleichungen

1. Beispiele für die Aufstellung von Integralgleichungen . . . . .	11
2. Klassifikation der Integralgleichungen . . . . .	14
3. Orthogonale Funktionensysteme . . . . .	16
4. Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art . . . . .	18
5. Iterierte Kerne . . . . .	20
6. Integralbeziehungen für die Resolvente. Ein Existenz- und Eindeutig- keitssatz . . . . .	23
7. Der Fredholmsche Nenner . . . . .	25
8. Fredholmsche Integralgleichungen mit beliebigem $\lambda$ . . . . .	31
9. Die transponierte Integralgleichung . . . . .	33
10. Lösbarkeit im Fall einer charakteristischen Zahl . . . . .	34
11. Die Fredholmschen Minoren . . . . .	40
12. Integralgleichungen mit ausgeartetem Kern . . . . .	40
13. Beispiele . . . . .	42
14. Verallgemeinerung der erhaltenen Ergebnisse . . . . .	44
15. Kompakte Mengen stetiger Funktionen . . . . .	46
16. Nichtbeschränkte Kerne . . . . .	49
17. Integralgleichungen mit polarem Kern . . . . .	52
18. Lösbarkeit im Fall einer charakteristischen Zahl . . . . .	54
19. Der mehrdimensionale Fall . . . . .	55
20. Integralgleichungen mit regulären iterierten Kernen . . . . .	56
21. Der Fredholmsche Formelapparat für polare Kerne . . . . .	59
22. Das Lebesguesche Integral . . . . .	60
23. Orthonormalsysteme in $L_2$ . . . . .	63
24. Lineare beschränkte Operatoren in $L_2$ . . . . .	66
25. Integralgleichungen mit Kernen aus $L_2$ . . . . .	67
26. Die adjungierte Gleichung . . . . .	69
27. Der ausgeartete Kern . . . . .	70
28. Lösung der Integralgleichung mit einem Kern aus $L_2$ für beliebige $\lambda$ . . . . .	72
29. Vollstetige Operatoren in $L_2$ . . . . .	75
30. Symmetrische Kerne . . . . .	78
31. Reihenentwicklung des Kerns nach Eigenfunktionen . . . . .	80
32. Quellenmäßig darstellbare Funktionen . . . . .	82
33. Der Raum $C_{L_2}$ . . . . .	84
34. Sätze über die Norm linearer Operatoren . . . . .	85
35. Die Existenz eines Eigenwertes . . . . .	87
36. Die Folge der Eigenwerte und der Entwicklungssatz . . . . .	88
37. Formulierung der Ergebnisse für Integraloperatoren . . . . .	92
38. Der Satz von DINI . . . . .	93
39. Reihenentwicklung der iterierten Kerne . . . . .	95
40. Darstellung der Lösung der Integralgleichung mit Hilfe der charakteri- stischen Zahlen und Eigenfunktionen . . . . .	98

41. Die Fredholm'schen Formeln für symmetrische Kerne . . . . .	99
42. Klassifikation der symmetrischen Kerne . . . . .	102
43. Der Mercersche Satz . . . . .	103
44. Schiefsymmetrische Kerne und symmetrisierbare Integralgleichungen . . . . .	104
45. Integralgleichungen erster Art . . . . .	106
46. Symmetrisierung des Kerns . . . . .	108
47. Beispiele . . . . .	110
48. Von einem Parameter abhängende Kerne . . . . .	113
49. Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	116
50. Volterrasche Integralgleichungen . . . . .	116
51. Die Laplacetransformation . . . . .	120
52. Faltung von Funktionen . . . . .	125
53. Ein spezieller Fall Volterrascher Integralgleichungen . . . . .	127
54. Volterrasche Integralgleichungen erster Art . . . . .	129
55. Beispiele . . . . .	132
56. Belastete Integralgleichungen . . . . .	136
57. Integralgleichungen erster Art mit Cauchyschen Kernen . . . . .	139
58. Randwertprobleme für analytische Funktionen . . . . .	140
59. Integralgleichungen zweiter Art mit Cauchyschem Kern . . . . .	144
60. Randwertprobleme für eine Strecke . . . . .	146
61. Die Umkehrung des Cauchyschen Integrals . . . . .	149
62. Die Fouriertransformation im Raum $L_1$ . . . . .	150
63. Die Fouriertransformation im Raum $L_2$ . Hermitesche Polynome . . . . .	154
64. Die Fouriersche Integralgleichung . . . . .	157
65. Integralgleichungen mit unendlichem Integrationsintervall . . . . .	158
66. Beispiele . . . . .	159
67. Halbunendliche Integrationsintervalle . . . . .	161
68. Beispiele . . . . .	163
69. Halbunendliche Integrationsintervalle (Fortsetzung) . . . . .	166

## II. Variationsrechnung

70. Problemstellung . . . . .	172
71. Fundamentallemmata der Variationsrechnung . . . . .	173
72. Die Eulersche Gleichung im einfachsten Fall . . . . .	176
73. Ausdehnung der Ergebnisse auf mehrere gesuchte Funktionen und Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	179
74. Ausdehnung der Ergebnisse auf mehrfache Integrale . . . . .	181
75. Bemerkungen zu den Eulerschen und Ostrogradskischen Gleichungen . . . . .	183
76. Beispiele . . . . .	185
77. Isoperimetrische Probleme . . . . .	192
78. Extrema mit Nebenbedingungen . . . . .	194
79. Beispiele . . . . .	196
80. Die Invarianz der Eulerschen und Ostrogradskischen Gleichungen . . . . .	202
81. Variationsprobleme in Parameterdarstellung . . . . .	204
82. Die geodätischen Linien im $n$ -dimensionalen Raum . . . . .	207
83. Natürliche Randbedingungen . . . . .	209
84. Funktionale von allgemeinerer Gestalt . . . . .	210
85. Die allgemeine Form der ersten Variation . . . . .	212
86. Die Transversalitätsbedingung . . . . .	215
87. Die kanonischen Veränderlichen . . . . .	217
88. Das Extremalenfeld im dreidimensionalen Raum . . . . .	219
89. Die allgemeine Theorie der Extremalenfelder . . . . .	223
90. Ein Ausnahmefall . . . . .	225

91. Der Jacobische Satz . . . . .	227
92. Diskontinuierliche Lösungen . . . . .	229
93. Extrema bei einseitigen Bindungen . . . . .	231
94. Die zweite Variation . . . . .	233
95. Die Bedingung von JACOBI . . . . .	234
96. Schwache und starke Extrema . . . . .	237
97. Ausdehnung der Ergebnisse auf mehrere gesuchte Funktionen . . . . .	239
98. Die Weierstraßsche Funktion . . . . .	241
99. Beispiele . . . . .	243
100. Das Ostrogradski-Hamiltonsche Prinzip . . . . .	245
101. Das Prinzip der kleinsten Wirkung . . . . .	246
102. Saite und Membran . . . . .	249
103. Stab und Platte . . . . .	250
104. Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie . . . . .	252
105. Das absolute Extremum . . . . .	255
106. Das Dirichletsche Integral . . . . .	257
107. Der allgemeine Fall eines Funktionals bei mehreren unabhängigen Veränderlichen . . . . .	261
108. Direkte Methoden der Variationsrechnung . . . . .	263
109. Beispiel . . . . .	264

**III. Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume  $L_1$  und  $L_2$ . Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale**

110. Mittelung von Funktionen aus $L_1$ und $L_2$ . . . . .	267
111. Eigenschaften der Mittelfunktionen . . . . .	268
112. Finite, unendlich oft differenzierbare Funktionen . . . . .	271
113. Verallgemeinerte Ableitungen . . . . .	272
114. Eigenschaften verallgemeinerter Ableitungen . . . . .	274
115. Die Funktionenklassen $W_2^1(\mathfrak{D})$ , $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$ und $W_2^2(\mathfrak{D})$ . . . . .	276
116. Die Ungleichung von POINCARÉ. Der Satz von RELLIICH . . . . .	280
117. Aufstellung eines Minimalproblems für ein quadratisches Funktional . . . . .	283
118. Lösung des Variationsproblems . . . . .	284
119. Zusammenhang mit einer Randwertaufgabe . . . . .	286

**Literaturhinweise** . . . . . 288

**Namen- und Sachverzeichnis** . . . . . 297



# I. Integralgleichungen

**1. Beispiele für die Aufstellung von Integralgleichungen.** Unter einer *Integralgleichung* versteht man eine Gleichung, bei der die gesuchte Funktion auch unter dem Integralzeichen auftritt. Es sei beispielsweise die Lösung der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  gesucht. Wie wir bereits früher [II, 51] gesehen haben, kann diese Aufgabe auf die Auflösung der Integralgleichung

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt + y_0$$

zurückgeführt werden. Entsprechend läßt sich das Anfangswertproblem  $y'' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$  auf die Integralgleichung

$$y(x) = \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t f[z, y(z)] dz + y_0 + y'_0 (x - x_0)$$

zurückführen. Formt man das iterierte Integral nach [II, 17] in ein einfaches Integral um, so erhält die Integralgleichung die Gestalt

$$y(x) = \int_{x_0}^x (x - z) f[z, y(z)] dz + y_0 + y'_0 (x - x_0).$$

Die allgemeine Lösung von  $y'' = f(x, y)$  ergibt sich aus der Integralgleichung

$$y(x) = \int_0^x (x - z) f[z, y(z)] dz + c_1 + c_2 x, \quad (1)$$

in der  $c_1$  und  $c_2$  willkürliche Konstante sind und die untere Integrationsgrenze gleich 0 gesetzt worden ist. Wir betrachten nun für unsere Differentialgleichung zweiter Ordnung ein Randwertproblem, und zwar suchen wir diejenige Lösung, welche die Randbedingungen  $y(0) = a$ ,  $y(l) = b$  erfüllt. Für  $x = 0$  und  $x = l$  erhalten wir aus (1) zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten zwei lineare Gleichungen, aus denen sich

$$c_1 = a \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{b - a}{l} - \frac{1}{l} \int_0^l (l - z) f[z, y(z)] dz$$

ergibt. Setzen wir diese Werte in (1) ein, so erhalten wir für unser Randwertproblem die Integralgleichung

$$y(x) = F(x) + \int_0^x (x - z) f[z, y(z)] dz - \frac{x}{l} \int_0^l (l - z) f[z, y(z)] dz, \quad (2)$$

wobei

$$F(x) = a + \frac{b - a}{l} x$$

ist. Statt dessen können wir auch

$$y(x) = F(x) - \int_0^x \frac{z(l-x)}{l} f[z, y(z)] dz - \int_x^l \frac{x(l-z)}{l} f[z, y(z)] dz \quad (3)$$

schreiben.

Führen wir jetzt die Funktion zweier Veränderlicher

$$K(x, z) = \begin{cases} \frac{z(l-x)}{l} & \text{für } z \leq x, \\ \frac{x(l-z)}{l} & \text{für } x \leq z \end{cases} \quad (4)$$

ein, so können wir der Gleichung (3) schließlich folgende Gestalt geben:

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z) f[z, y(z)] dz. \quad (5)$$

Wenden wir dieses Ergebnis auf die lineare Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y = \omega(x) \quad (6)$$

an, dann gelangen wir zu dem Satz, daß die Bestimmung einer Lösung des Randwertproblems

$$y'' + p(x)y = \omega(x), \quad y(0) = a, \quad y(l) = b \quad (7)$$

gleichwertig ist mit der Auflösung der linearen Integralgleichung

$$y(x) = F_1(x) + \int_0^l K(x, z) p(z) y(z) dz; \quad (8)$$

darin ist  $y(x)$  die gesuchte Funktion und

$$F_1(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z) \omega(z) dz$$

eine bekannte Funktion der unabhängigen Veränderlichen  $x$ .

Wir weisen darauf hin, daß in der Gleichung (1) die obere Integrationsgrenze veränderlich ist, dagegen in (8) beide Integrationsgrenzen konstant sind. Ferner sei bemerkt, daß in (1) wie auch in (8) die gesuchte Funktion nicht nur unter dem Integralzeichen, sondern auch außerhalb desselben vorkommt. Diese Tatsache ist, wie wir bereits gesehen haben [II, 50], wesentlich, wenn man die Integralgleichung durch sukzessive Approximation auflösen will.

Wir multiplizieren nun den Koeffizienten  $p(x)$  in der Differentialgleichung (6) mit einem Parameter  $\lambda$  und betrachten die homogene Differentialgleichung

$$y'' + \lambda p(x)y = 0 \quad (9)$$

mit den homogenen Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (10)$$

Dieses homogene Randwertproblem führt auf die folgende homogene Integralgleichung, die den Parameter  $\lambda$  enthält:

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, z) p(z) y(z) dz. \quad (11)$$

Eines der wichtigsten Probleme, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen, besteht darin, festzustellen, für welche Werte von  $\lambda$  nicht identisch verschwindende

Lösungsfunktionen existieren. Auf dieses Problem waren wir schon bei der Anwendung der Fourierrmethode auf Randwertprobleme der mathematischen Physik gestoßen. Es sei noch auf einige charakteristische Eigenschaften der Funktion  $K(x, z)$ , die der Kern unserer Integralgleichung genannt wird, hingewiesen. Dieser Kern ist in dem durch  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq z \leq l$  definierten Quadrat  $k_0$  stetig. Auf der Diagonalen  $x = z$  dieses Quadrates ist die erste Ableitung des Kerns unstetig:

$$K_x(x, z) |_{x=z+0} - K_x(x, z) |_{x=z-0} = -1.$$

Außerhalb der Diagonalen ist der Kern als Funktion von  $x$  eine Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y'' = 0$  und genügt den homogenen Randbedingungen (10). Schließlich ist der Kern symmetrisch:

$$K(z, x) = K(x, z). \quad (12)$$

Alle diese Eigenschaften des Kerns ergeben sich unmittelbar aus (4).

Der Kern  $K(x, z)$  hat eine einfache physikalische Bedeutung. Wirkt senkrecht auf eine an den Enden eingespannte Saite im Punkt  $x = z$  eine Kraft, so muß bekanntlich [II, 176] im Angriffspunkt der Kraft die Bedingung

$$T_0[(u_x)_{x=z+0} - (u_x)_{x=z-0}] = -P$$

erfüllt sein, in der  $P$  der Betrag der Kraft und  $T_0$  die Saitenspannung ist. Man kann leicht nachprüfen, daß die Funktion

$$u(x) = \frac{P}{T_0} K(x, z)$$

die Form der statischen Ausbiegung der Saite unter dem Einfluß der Kraft darstellt. Wir erwähnen hierzu noch, daß die Gleichung der schwingenden Saite für den statischen Fall einfach auf die Differentialgleichung  $u_{xx} = 0$  führt. Die Überführung eines Randwertproblems in eine Integralgleichung, die hier für einen sehr einfachen Fall dargestellt wurde, wird ausführlich in Teil IV/2 behandelt.

Zum Schluß wollen wir noch auf eine charakteristische Methode zur Überführung von Randwertproblemen der mathematischen Physik in Integralgleichungen hinweisen. Wir hatten früher [III/2, 139] das Potential der einfachen Kugelflächenbelegung durch die Formel

$$u(M) = \iint_S \frac{\varrho(M')}{d} ds$$

definiert, in der  $\varrho(M')$  eine auf der Kugeloberfläche  $S$  gegebene Funktion,  $ds$  das Flächenelement der Kugeloberfläche und  $d$  die Entfernung zwischen einem beliebigen Punkt  $M$  des Raumes und einem beliebigen Punkt  $M'$  der Kugeloberfläche bedeuten. Es seien  $n$  die Richtung der äußeren Normalen in einem Punkt  $M_0$  der Kugeloberfläche und  $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i$  bzw.  $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_a$  die Grenzwerte der Ableitung  $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$  für den Fall, daß der Raumpunkt  $M$  von innen bzw. von außen gegen den Punkt  $M_0$  der Kugeloberfläche konvergiert. Wir erhielten damals die Beziehungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i &= - \iint_S \varrho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds + 2\pi\varrho(M_0), \\ \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_a &= - \iint_S \varrho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds - 2\pi\varrho(M_0), \end{aligned} \quad (13)$$

wobei  $d$  nun die Entfernung zwischen den beiden Punkten  $M_0$  und  $M'$  der Kugeloberfläche angibt und  $\omega$  der Winkel zwischen der Kugelsekante  $\overline{M'M_0}$  und der Normalen  $n$  ist.

Im folgenden Kapitel werden wir sehen, daß diese Formeln nicht nur für die Kugeloberfläche richtig sind. Wir formulieren nun das Neumannsche Problem für das Kugelinere: Wir suchen eine Funktion, die im Innern der Kugel harmonisch ist und deren Normalableitung auf der Kugeloberfläche die vorgegebenen Randwerte

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f(M_0) \quad (14)$$

annimmt. Wir setzen die Funktion  $u$  als Potential einer Kugelflächenbelegung an. Da ein solches Potential im Innern der Kugel eine harmonische Funktion ist, haben wir nur die Belegungsdichte  $\varrho(M')$  so zu wählen, daß auch die Randbedingung (14) erfüllt ist. Aus der ersten Beziehung (13) und der Randbedingung (14) erhalten wir zur Bestimmung der gesuchten Dichte die Integralgleichung

$$2\pi\varrho(M_0) = f(M_0) + \iint_S \varrho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds.$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Funktionen  $f(M)$  und  $\varrho(M)$  jetzt auf einer Kugeloberfläche definiert sein müssen und die Integration nicht wie bisher über ein Intervall der  $x$ -Achse, sondern über die Kugeloberfläche zu erstrecken ist.

**2. Klassifikation der Integralgleichungen.** Wir betrachten als erstes lineare Integralgleichungen, und zwar zunächst für den Fall, daß die gesuchte Funktion von einer einzigen Veränderlichen  $x$  abhängt. In der Integralgleichung

$$y(x) = \int_a^x K(x, z) y(z) dz + f(x) \quad (15)$$

sei  $y(x)$  die gesuchte Funktion,  $f(x)$  und  $K(x, z)$  seien gegebene Funktionen. Die Funktion  $K(x, z)$  heißt der *Kern der Integralgleichung*.

Die Gleichung (15) wird *Volterrasche Integralgleichung zweiter Art* genannt. Die analoge Integralgleichung

$$y(x) = \int_a^b K(x, z) y(z) dz + f(x) \quad (16)$$

mit konstanten Grenzen heißt *Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art*. Kommt die gesuchte Funktion nur unter dem Integralzeichen vor, so handelt es sich um eine *Volterrasche* bzw. *Fredholmsche Integralgleichung erster Art*:

$$\int_a^x K(x, z) y(z) dz = f_1(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b K(x, z) y(z) dz = f_1(x). \quad (17)$$

Ein Beispiel für eine Volterrasche Integralgleichung erster Art ist die Abelsche Integralgleichung

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{u(y) dy}{\sqrt{h-y}},$$

von der schon in [II, 82] die Rede war.

Wir geben noch ein Beispiel für eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art

an. Es sei  $u(x)$  die statische Ausbiegung einer Saite bei einer kontinuierlich verteilten Belastung  $p(z)$ , bezogen auf die Längeneinheit. Fassen wir diese Belastung als Summe von Einzelkräften  $p(z) dz$  auf, so erhalten wir nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes von einer jeden solchen Einzelkraft die statische Ausbiegung

$$\frac{1}{T_0} K(x, z) p(z) dz,$$

wobei  $K(x, z)$  durch (4) bestimmt ist. Durch Integration erhalten wir als statische Ausbiegung bei kontinuierlich verteilter Belastung

$$u(x) = \frac{1}{T_0} \int_0^l K(x, z) p(z) dz.$$

Diese Gleichung ist eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art, wenn die Ausbiegung  $u(x)$  gegeben und die Belastung  $p(z)$  gesucht ist.

Wir bemerken, daß die Volterrasche Integralgleichung ein Spezialfall der Fredholmschen Integralgleichung ist; denn wir können in den Volterraschen Integralgleichungen (15) oder (17) über  $z$  von  $z=a$  bis  $z=b$  integrieren, wenn wir von vornherein die Definition des Kerns  $K(x, z)$  durch die Bedingung  $K(x, z)=0$  für  $z > x$  ergänzen.

Im folgenden werden wir uns fast ausschließlich mit Integralgleichungen zweiter Art und dabei in der Hauptsache mit Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art beschäftigen; denn dieser Art von Integralgleichungen begegnet man bei der Lösung von Randwertproblemen der mathematischen Physik am häufigsten. Die Theorie der Integralgleichungen zweiter Art ist bedeutend einfacher als die Theorie der Integralgleichungen erster Art. Wie wir schon erwähnt haben, gibt uns das Auftreten der gesuchten Funktion außerhalb des Integralzeichens die Möglichkeit, die Methode der sukzessiven Approximation anzuwenden.

Die Theorie der Integralgleichungen ist in mancher Hinsicht der linearen Algebra analog, die in Teil III/1 behandelt worden ist. Bekanntlich hat eine lineare Transformation im  $n$ -dimensionalen Raum die Gestalt

$$y_i = a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n \quad (i=1, \dots, n).$$

Sie läßt sich durch eine Matrix ausdrücken, die aus den Koeffizienten  $a_{ik}$  der Transformation gebildet wird. Wir schreiben damit die Transformation in der Gestalt

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{u},$$

wobei  $\mathbf{u}(u_1, \dots, u_n)$  der ursprüngliche Vektor,  $\mathbf{y}(y_1, \dots, y_n)$  der transformierte Vektor und  $\mathbf{A}$  die Matrix der Koeffizienten  $a_{ik}$  ist. Im Fall der Integralgleichungen tritt an die Stelle eines  $n$ -dimensionalen Vektors eine Funktion, die gewöhnlich auf einem Intervall  $[a, b]$  erklärt ist; die Matrix  $\mathbf{A}$  wird durch den Kern  $K(x, z)$  und die Summation durch eine Integration ersetzt, so daß der linearen Transformation jetzt eine Beziehung

$$y(x) = \int_a^b K(x, z) u(z) dz \quad (18)$$

entspricht. Hierin ist  $u(z)$  die ursprüngliche und  $y(x)$  die transformierte Funktion.

Weiterhin erinnern wir daran, daß wir diejenigen Werte des Parameters  $\mu$  Eigen-

werte der Matrix  $A$  genannt haben, für welche die Gleichung

$$Ax = \mu x$$

von 0 verschiedene Lösungen  $x$  besitzt. Unter Eigenwerten des Kerns  $K(x, y)$  oder der zugehörigen Transformation werden wir die Werte des Parameters  $\mu$  verstehen, für die die homogene Integralgleichung

$$\int_a^b K(x, z) y(z) dz = \mu y(x)$$

nicht verschwindende Lösungen hat. In der Theorie der Integralgleichungen ist es üblich, neben den Eigenwerten  $\mu$  die *charakteristischen Zahlen*  $\lambda = \mu^{-1}$  einzuführen. Man nennt also  $\lambda$  eine charakteristische Zahl, wenn die Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, z) y(z) dz \quad (19)$$

von 0 verschiedene Lösungen besitzt. Diese Lösungen  $y(x)$  selbst heißen Eigenfunktionen des Kerns.

Es sei noch erwähnt, daß die identische Transformation, durch die eine Funktion  $u(x)$  sich selbst zugeordnet wird [wobei also  $y(x)$  mit  $u(x)$  übereinstimmt], sich nicht in der Integralforn (18) ausdrücken läßt.

In der Theorie der Integralgleichungen müssen wir natürlich einige Voraussetzungen über den Kern  $K(x, z)$  sowie über die Funktionen  $f(x)$  und  $y(x)$  machen.

Einstweilen werden wir uns, wie schon erwähnt, mit Integralgleichungen im eindimensionalen Fall beschäftigen. Auf den Übergang zum mehrdimensionalen Fall wird später eingegangen werden.

Schließlich bemerken wir noch, daß im folgenden sowohl die gegebenen als auch die gesuchten Funktionen zuweilen komplexwertig sein werden:

$$\begin{aligned} K(x, z) &= K_1(x, z) + iK_2(x, z), \\ f(x) &= f_1(x) + if_2(x), \\ y(x) &= y_1(x) + iy_2(x); \end{aligned}$$

dabei sind  $K_s(x, z)$ ,  $f_s(x)$  und  $y_s(x)$  ( $s=1, 2$ ) reellwertige Funktionen. Die unabhängige Veränderliche wird stets als reell angenommen. Im folgenden werden wir es oft mit endlichen abgeschlossenen Intervallen zu tun haben. Ein solches Intervall soll mit  $[a, b]$  bezeichnet werden.

**3. Orthogonale Funktionensysteme.** In der Theorie der Integralgleichungen trifft man häufig auf orthogonale Funktionensysteme. In Teil II wurde die Theorie solcher Systeme auf der Grundlage sowohl des Riemannschen als auch des Lebesgueschen Integralbegriffs für reelle und komplexe Funktionen ausführlich entwickelt [II, 160, 163]. Hier sollen diese Ergebnisse durch die Darstellung des Orthogonalisierungsverfahrens für Systeme linear unabhängiger Funktionen ergänzt werden.

In [III/1, 31] haben wir gesehen, daß man zu  $m$  linear unabhängigen Vektoren stets ebenso viele paarweise orthogonale und normierte Vektoren bilden kann derart, daß sich die ursprünglichen Vektoren linear durch die letzteren ausdrücken lassen und umgekehrt. Dieses Verfahren läßt sich wörtlich auf Funktionen übertragen.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Das Verfahren stammt von ERHARD SCHMIDT und heißt daher *Erhard-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren*. (Anm. d. Red.)



Dann multiplizieren wir beide Seiten mit  $\overline{\varphi_k(x)}$  ( $k=1, \dots, m$ ) und integrieren. Da die Funktionen  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  nach Voraussetzung orthogonal sind, erhalten wir  $\alpha_k=0$ , d. h., alle Koeffizienten  $\alpha_k$  müssen tatsächlich gleich 0 sein.

Bis jetzt haben wir Funktionen einer einzigen unabhängigen Veränderlichen zugrunde gelegt. Alles bisher Gesagte läßt sich auch auf Funktionen übertragen, die auf einem endlichen abgeschlossenen Bereich<sup>1)</sup> der Ebene, des dreidimensionalen oder des  $n$ -dimensionalen Raumes erklärt sind.

Es sei  $P$  ein veränderlicher Punkt aus einem endlichen meßbaren abgeschlossenen Bereich  $B$  der Ebene, des dreidimensionalen Raumes oder einer Fläche, d. h. aus einem Bereich, zu dem alle Randpunkte hinzugezählt werden. Die Funktionen  $\varphi_k(P)$  bilden ein normiertes Orthogonalsystem, wenn die Beziehungen

$$\int_B \varphi_p(P) \overline{\varphi_q(P)} d\omega_P = \begin{cases} 0 & \text{für } p \neq q, \\ 1 & \text{für } p = q \end{cases}$$

bestehen. Das (der Einfachheit halber nur mit einem einzigen Integralzeichen geschriebene) Integral ist als Doppel-, Raum- oder Oberflächenintegral aufzufassen. Mit  $d\omega_P$  wird das entsprechende Flächen- oder Raumelement im Punkt  $P$  bezeichnet. Beispielsweise gilt für ein Doppelintegral in kartesischen Koordinaten  $d\omega_P = dx dy$ .

Die Fourierkoeffizienten einer Funktion  $f(P)$  sind

$$c_k = \int_B f(P) \overline{\varphi_k(P)} d\omega_P, \quad (20)$$

und die Besselsche Ungleichung schreibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \int_B |f(P)|^2 d\omega_P. \quad (21)$$

**4. Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art.** Nach den vorhergehenden einleitenden Abschnitten beginnen wir nun mit dem Studium der Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art in einer Veränderlichen

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt, \quad (22)$$

die den Parameter  $\lambda$  enthält. Wir nehmen an, daß  $f(s)$  auf dem endlichen Intervall  $[a, b]$  stetig ist und daß der Kern  $K(s, t)$  in dem durch die Ungleichungen  $a \leq s \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$  definierten Quadrat  $k_0$  eine stetige Funktion ist. Unter diesen Voraussetzungen sind alle im folgenden durchzuführenden Umformungen zulässig, so daß wir unsere ganze Aufmerksamkeit auf die prinzipielle Vorgehensweise richten können. Die Funktionen  $f(s)$  und  $K(s, t)$  werden, falls nicht etwas anderes vereinbart wird, als komplexwertig angenommen:

$$\begin{aligned} K(s, t) &= K_1(s, t) + iK_2(s, t), \\ f(s) &= f_1(s) + if_2(s), \quad \varphi(s) = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s). \end{aligned}$$

Die Lösungen der Integralgleichung suchen wir in der Klasse der stetigen Funktionen. Danach werden wir Integralgleichungen mit polaren Kernen eines speziellen Typs untersuchen. Im Fall einer unabhängigen Veränderlichen sind das Integral-

<sup>1)</sup> Wir nennen eine zusammenhängende Punktmenge einen *Bereich* und einen offenen Bereich speziell ein *Gebiet*. (Anm. d. Red.)

gleichungen der Gestalt

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \frac{L(s, t)}{|s-t|^\alpha} \varphi(t) dt \quad (0 < \alpha < 1)$$

mit einer in  $k_0$  stetigen Funktion  $L(s, t)$ . Wir setzen  $f(s)$  als stetig voraus und suchen wieder stetige Lösungen. Im zweidimensionalen Fall haben diese Integralgleichungen die Gestalt

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \int_B \frac{L(P, Q)}{r^\alpha(P, Q)} \varphi(Q) dx dy,$$

wobei  $0 < \alpha < 2$  gilt und  $r(P, Q)$  der Abstand zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$  aus dem Gebiet  $B$  ist. Die Integration erfolgt hier nach dem variablen Punkt  $Q$ . Eine analoge Gestalt besitzen die Integralgleichungen mit polarem Kern im dreidimensionalen Gebiet, auf einer Fläche und allgemein im  $n$ -dimensionalen Gebiet.

Schließlich werden wir bei Verwendung des Lebesgueschen Integralbegriffs noch Integralgleichungen in der Klasse  $L_2$  [II, 161] unter zusätzlichen Voraussetzungen betrachten, die im weiteren noch zu präzisieren sind.

Zunächst wenden wir uns der „Integraltransformation“ (dem „Integraloperator“)

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (23)$$

zu. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit des Kerns  $K(s, t)$  in  $k_0$  wird dabei jeder auf dem Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktion  $\varphi(t)$  eine stetige Funktion  $\psi(s)$  zugeordnet. Aus (23) folgt nämlich

$$\psi(s+h) - \psi(s) = \int_a^b [K(s+h, t) - K(s, t)] \varphi(t) dt.$$

Nehmen wir nun an, daß das Integral von  $|\varphi(t)|^2$  endlich ist, so erhalten wir mit Hilfe der Bunjakowskischen Ungleichung<sup>1)</sup>

$$|\psi(s+h) - \psi(s)|^2 \leq \int_a^b |K(s+h, t) - K(s, t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt.$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite ist eine Konstante, so daß sich aus der Stetigkeit von  $K(s, t)$  die von  $\psi(s)$  ergibt. Der Operator (23) transformiert demnach jede Funktion mit der oben genannten Eigenschaft in eine auf dem Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $\psi(s)$ . Aus dem Gesagten folgt: Bei stetigen Funktionen  $K(s, t)$  und  $f(s)$  ist es ganz natürlich, auch die Lösung  $\varphi(s)$  der Integralgleichung (22) in der Klasse der stetigen Funktionen zu suchen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß der Operator (23) linear ist, d. h., sind  $c_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) Konstanten, so gilt

$$\int_a^b K(s, t) \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t) dt = \sum_{i=1}^m c_i \int_a^b K(s, t) \varphi_i(t) dt. \quad (24)$$

Im Fall  $f(s) \neq 0$  heißt (22) eine inhomogene Integralgleichung.

Die zugehörige homogene Integralgleichung lautet

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (25)$$

<sup>1)</sup> In der deutschen Literatur *Schwarzsche Ungleichung* genannt. (Anm. d. Red.)

Sie hat die triviale Lösung  $\varphi(s) \equiv 0$ , die wir Nulllösung nennen. Wie bereits in [2] erwähnt wurde, heißt der Wert  $\lambda = \lambda_0$ , für den die Integralgleichung (25) von der Nulllösung verschiedene Lösungen hat, charakteristische Zahl des Kerns  $K(s, t)$  oder der zugehörigen Integralgleichung, und jede von der Nulllösung verschiedene Lösung der Integralgleichung

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (26)$$

wird Eigenfunktion für die zugehörige charakteristische Zahl  $\lambda = \lambda_0$  genannt. Die Zahl  $\lambda_0 = 0$  kann offenbar keine charakteristische Zahl sein, weil dann aus (26) die Beziehung  $\varphi(s) \equiv 0$  folgen würde. Es seien  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_m(s)$  Eigenfunktionen, die zu ein und derselben charakteristischen Zahl  $\lambda = \lambda_0$  gehören. Da die Integralgleichung (25) linear und homogen bezüglich der gesuchten Funktion ist, ist auch die Linearkombination

$$\varphi(s) = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots + c_m \varphi_m(s) \quad (27)$$

mit willkürlichen Konstanten  $c_l$  Eigenfunktion, die zu demselben  $\lambda = \lambda_0$  gehört, sofern nur (27) nicht in  $s$  identisch verschwindet. Wenn die Funktionen  $\varphi_l(s)$  ( $l = 1, \dots, m$ ) linear unabhängig sind, dann gilt  $\varphi(s) \equiv 0$  nur in dem Fall, daß alle Konstanten  $c_p$  gleich 0 sind. Wie wir später zeigen werden, gehören zu jeder charakteristischen Zahl nur endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen  $\varphi_p(s)$  ( $p = 1, 2, \dots, k$ ), so daß durch

$$\varphi(s) = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots + c_k \varphi_k(s) \quad (28)$$

mit willkürlichen Konstanten  $c_p$ , die nicht alle gleich 0 sind, alle zur charakteristischen Zahl  $\lambda = \lambda_0$  gehörenden Eigenfunktionen dargestellt werden. Allgemein gesagt, bilden die Funktionen  $\varphi_p(s)$  ( $p = 1, 2, \dots, k$ ) eine *Basis* für die Lösungen der Integralgleichung (26). Wird die Basis  $\varphi_p(s)$  durch die lineare Abbildung

$$\psi_p(s) = a_{p1} \varphi_1(s) + a_{p2} \varphi_2(s) + \dots + a_{pk} \varphi_k(s) \quad (p = 1, 2, \dots, k) \quad (29)$$

mit von 0 verschiedener Koeffizientendeterminante  $\|a_{pq}\|$  transformiert, so bilden die  $\psi_p(s)$  wieder eine Basis für die Lösungen der Integralgleichung. Insbesondere läßt sich das Orthogonalisierungsverfahren auf das Funktionensystem  $\varphi_p(s)$  anwenden, so daß wir die Basis als orthonormiert annehmen können.

**5. Iterierte Kerne.** Im folgenden schreiben wir für Integraloperatoren der Gestalt

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (30)$$

zur Abkürzung häufig  $\psi = K\varphi$ . Wie wir schon erwähnt haben, ist dieser Operator linear:

$$K(c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2) = c_1 K\varphi_1 + c_2 K\varphi_2, \quad (31)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  Konstanten sind.

Gegeben seien zwei Integraloperatoren mit stetigen Kernen:

$$v(s) = \int_a^b K(s, t) u(t) dt, \quad v_1(s) = \int_a^b L(s, t) u(t) dt. \quad (32)$$

Wir bezeichnen sie mit  $K$  und  $L$ . Weiterhin sei  $LK[u(t)]$  oder einfach  $LKu$  derjenige Operator, den man erhält, wenn man zuerst den Operator  $K$  und danach den